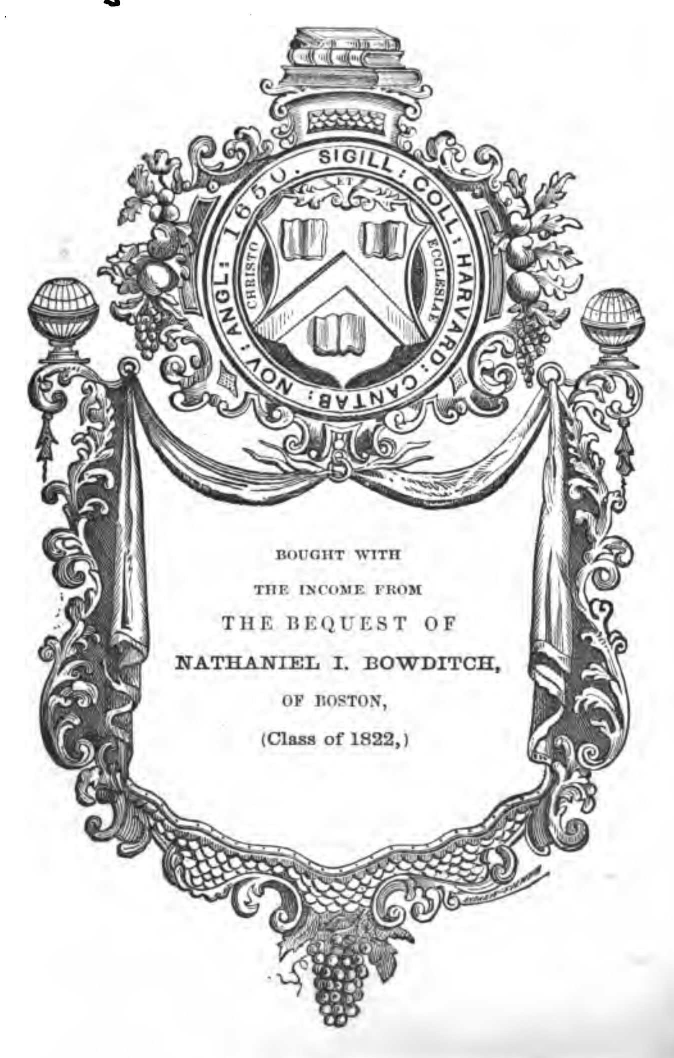

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE

Lehrbuch

der

Dynamik fester Körper

von

Dr. Jul. Petersen,
Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften.

Deutsche Ausgabe,

unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

von

Dr. R. von Fischer-Benzon,
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen.

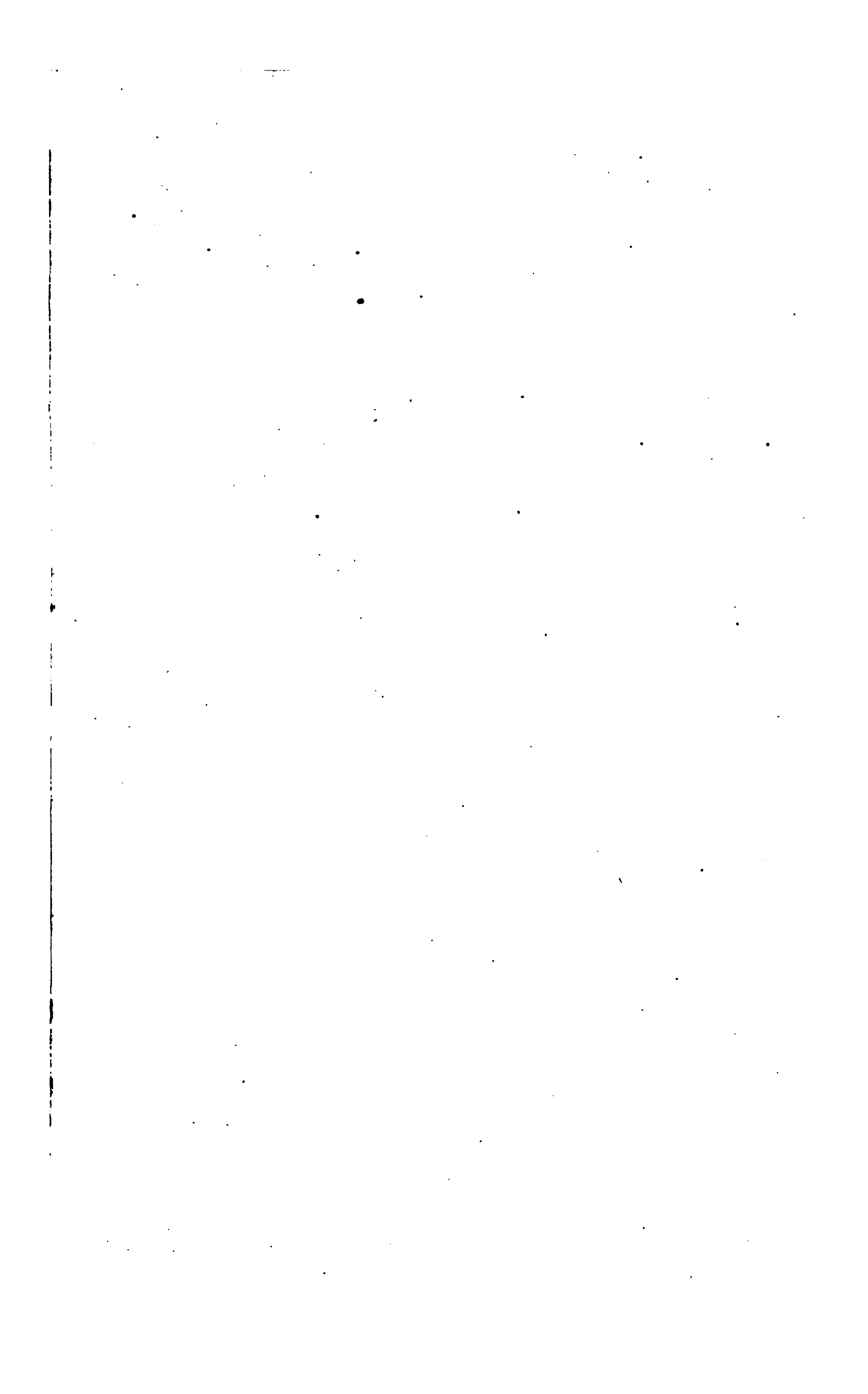
Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn,

Königl. Hofbuchhändler.

Buchhändler der kön. dän. Akademie der Wissenschaften.

1887





Lehrbuch

der

Dynamik fester Körper

von

Dr. **Jul. Petersen,**

Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften.

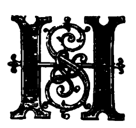
Deutsche Ausgabe,

unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

von

Dr. **R. von Fischer-Benzon,**

Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



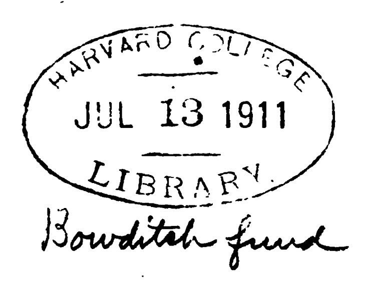
Kopenhagen.

Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn,

Königl. Hofbuchhändler.

Buchhändler der kön. dän. Akademie der Wissenschaften.

1887



Kopenhagen. — Bianco Lunos Kön. Hof.-Buchdruckerei.

EINLEITUNG.

1. Grundsätze. In der Statik haben wir die Kräfte nur untereinander verglichen und namentlich, indem wir sie nach Kilogrammen maſsen, mit der Schwerkraft. In der Dynamik tritt uns eine neue Frage entgegen, nämlich folgende: Welche Wirkung übt eine gegebene Kraft auf den Bewegungszustand eines gegebenen Körpers aus? Hier müssen wir uns an die Erfahrung wenden, und diese hat uns die Richtigkeit von folgenden fundamentalen Sätzen gelehrt.

I. Eine Kraft, welche auf ein Teilchen in der Zeit dt wirkt, erteilt demselben eine **geometrische** Geschwindigkeitszunahme, welche die Richtung der Kraft besitzt und ihrer Gröſse nach der Kraft proportional ist. Die Zunahme ist unabhängig von der Richtung und Gröſse der im voraus vorhandenen Geschwindigkeit.

Da mehrere Kräfte, welche gleichzeitig auf das Teilchen wirken, durch ihre Resultante ersetzt werden können, so muſs diese eine Geschwindigkeitszunahme hervorbringen, die gleich der geometrischen Summe der

Geschwindigkeitszunahmen ist, welche die Kräfte, einzeln genommen, hervorbringen würden.

II. Kräfte, welche verschiedenen Teilchen identische Geschwindigkeitszunahmen erteilen, sind den Massen der Teilchen proportional.

Dieses Princip lehrt uns, dafs von den physischen Eigenschaften des Teilchens nur seine Masse in der Dynamik Bedeutung für uns hat, während andere Eigenschaften, wie Farbe, Leitungsvermögen u. s. w. keinen Einflufs auf die Veränderung im Bewegungszustande des Teilchens haben, welche eine gegebene Kraft verursacht.

III. Wirkung und Gegenwirkung (Aktion und Reaktion) sind gleich grofs und entgegengesetzt.

Dieses Princip, welches dieselbe Gültigkeit für die Bewegung wie für die Ruhe besitzt, läfst sich für den Fall beweisen, wo die Körper einen direkten Druck auf einander ausüben; denn denkt man sich zwischen den beiden Körpern beispielsweise ein dünnes Blatt von unendlich kleiner Masse, so müfste dieses eine unendlich grofse Geschwindigkeit erhalten, wenn Wirkung und Gegenwirkung sich nicht aufhöben.

Dieser Beweis läfst sich jedoch nicht benutzen, wenn die Kräfte in der Entfernung wirken, z. B. bei der allgemeinen Anziehung.

2. Bewegungsgröfse. Unter der Bewegungsgröfse eines Teilchens versteht man das Produkt aus dessen Masse und Geschwindigkeit.

Man sagt, dafs die Bewegungsgröfse dieselbe Richtung habe wie die Geschwindigkeit; ebenso wie diese stellt man sie durch eine Strecke dar, indem man eine

beliebige Strecke zur Einheit nimmt. Bewegungsgröfsen werden ebenso wie Geschwindigkeiten zerlegt und zusammengesetzt.

3. Dynamisches Mafs der Kräfte. Da eine Kraft, welche in der Zeit dt einem Teilchen von der Masse m eine geometrische Geschwindigkeitszunahme $[dv]$ erteilt, demselben Teilchen, wenn sie unverändert an Gröfse und Richtung in einer Zeiteinheit wirkte, die geometrische Geschwindigkeitszunahme $\frac{[dv]}{dt}$ geben würde, so können wir nach I und II für die Kraft annehmen

$$\varphi = km \frac{[dv]}{dt},$$

worin k eine Konstante bedeutet, die willkürlich gewählt werden kann, solange wir nur die dynamischen Wirkungen verschiedener Kräfte vergleichen wollen. Wir können jedoch einen solchen Wert für k wählen, dafs das dynamische Mafs mit dem früher angenommenen statischen Mafs identisch wird.

Versuche haben gezeigt, dafs die Schwere in einer Sekunde einer Masse m eine Geschwindigkeitszunahme von

$$g = 9{,}80896\, m\,^{*})$$

erteilt, so dafs man für das dynamische Mafs der Schwerkraft

$$\varphi = kmg$$

erhält, und dieses fällt für $k = 1$ mit dem statischen Mafs der Kraft, nämlich dem Gewicht, zusammen. Wir setzen deshalb

$$\varphi = m \frac{[dv]}{dt}; \qquad (1)$$

---

*) Für Paris und. auf die Meeresoberfläche reduciert, nach Biot.

hierdurch wird also die Kraft sowohl der Richtung wie der Gröfse nach bestimmt.

Unsere Masseneinheit ist diejenige Masse, welche g Kilogramm wiegt, also diejenige, welche in g Kubikdecimetern Wasser im Zustande seiner gröfsten Dichtigkeit enthalten ist.

Wenn wir die Bewegung eines Teilchens untersuchen, so setzen wir in der Regel voraus, dafs das Teilchen die Masse 1 hat; die Kraft heifst dann die beschleunigende Kraft, während sie bei einer beliebigen Masse die bewegende Kraft heifst.

4. Komponenten der Kraft. Da $\frac{[dv]}{dt}$ die Beschleunigung der Gröfse und Richtung nach bestimmt, so ist dieselbe identisch mit der beschleunigenden Kraft. Da nun Kräfte und Beschleunigungen auf dieselbe Art zerlegt und zusammengesetzt werden, so haben wir, wenn X, Y und Z die Komponenten der beschleunigenden Kraft sind (Kinematik, 28),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{2}$$

und ferner (Kinematik, 29)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = T; \quad \frac{v^2}{\rho} = C, \tag{3}$$

wo T und C, die Tangentialkraft und die Centripetalkraft, die Komponenten der beschleunigenden Kraft darstellen, beziehungsweise nach Tangente und Hauptnormale.

Aus den Gleichungen (2) bestimmt man leicht die Kraft, wenn die Bewegung bekannt ist, wenn also x, y und z bekannte Funktionen von t sind. Die umgekehrte Aufgabe verlangt die Integration der drei zusammen-

gehörenden Differentialgleichungen; dadurch werden sechs willkürliche Konstanten eingeführt, die sich in der Regel dadurch bestimmen lassen, dafs man die Geschwindigkeit und die Koordinaten zu einem gegebenen Zeitpunkt kennt.

Die erste der beiden Gleichungen (3) zeigt, dafs die Geschwindigkeit konstant bleibt bei jeder Bewegung, bei der die Kraft beständig normal zur Bahn gerichtet ist, während die zweite Gleichung zeigt, dafs die Bahn eine Gerade wird, wenn die Richtung der Kraft beständig mit der der Geschwindigkeit zusammenfällt. Man kann also sagen, dafs jede von den Komponenten ihre besondere Rolle spielt, indem die Tangentialkraft die absolute Gröfse der Geschwindigkeit verändert, während die Centripetalkraft die Richtung derselben verändert.

Um die Komponenten der bewegenden Kraft zu erhalten, braucht man nur diejenigen der beschleunigenden Kraft mit m zu multiplicieren, so dafs man hat:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \\ m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = T; \quad \frac{mv^2}{\rho} = C. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Da $m[dv]$ die geometrische Zunahme der Bewegungsgröfse in der Zeit dt ist, so kann man die Gleichung (1) auch folgendermafsen in Worten ausdrücken:

Die bewegende Kraft wird nach Gröfse und Richtung durch die Bewegungsgröfse gemessen, welche dieselbe, unverändert in einer Zeiteinheit wirkend, einem Teilchen von beliebiger Masse mitteilt.

5. Vorzeichen. In den Gleichungen (2) kommen die Kräfte mit ihren Vorzeichen vor, so wie diese in der

Statik bestimmt wurden durch die Richtungen der Kräfte, verglichen mit den positiven Richtungen der Axen. Im allgemeinen kann man sagen, dafs die Komponenten positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem ihre Wirkung eine Vergröfserung oder eine Verkleinerung der entsprechenden Koordinaten mit sich bringt.

Die zweite Gleichung (3) zeigt, dafs ρ und C mit demselben Vorzeichen zu nehmen sind, während die erste zeigt, dafs T positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem s, das mit Vorzeichen gerechnet wird, dadurch vergröfsert oder verkleinert wird.

Es ist von Bedeutung, dafs man einen wichtigen Unterschied zwischen der Dynamik und der Geometrie im Auge behält; in der letzteren werden Gleichungen, welche für einen speciellen Fall gebildet sind, in der Regel allgemein gültig sein, während die Gleichungen in der Dynamik häufig nur innerhalb gewisser Grenzen gelten, so dafs man dasselbe Problem oft zerlegen und verschiedene Teile der Bewegung durch verschiedene Gleichungen behandeln mufs.

6. Arbeit und lebendige Kraft. Wenn ein Teilchen von der Masse m die Geschwindigkeit v besitzt, so nennt man das Produkt $\frac{1}{2}mv^2$ die lebendige Kraft*) des Teilchens. Addiert man die lebendigen Kräfte aller Teilchen eines Systems von materiellen Punkten, so erhält man die lebendige Kraft des ganzen Systems. Bei der Bestimmung der lebendigen Kraft spielen die Richtungen der Geschwindigkeiten also keine Rolle, sondern nur die absoluten Gröfsen derselben haben Bedeutung.

Wenn eine Kraft P auf ein Teilchen wirkt, das ein

---

*) Einige Schriftsteller nennen mv^2 die lebendige Kraft.

Bogenelement ds durchläuft, welches, in der Richtung der Bewegung genommen, mit der Kraft den Winkel α bildet, so nennt man

$$P \cos \alpha . ds$$

die bei dieser Bewegung von der Kraft geleistete Elementararbeit. Diese ist gleichbedeutend mit dem, was wir in der Statik das der Verschiebung ds entsprechende virtuelle Moment genannt haben. Wir können daher auf die Arbeit diejenigen Sätze anwenden, die wir bei unserer Untersuchung über das virtuelle Moment entwickelt haben. Im besonderen ist zu merken, dafs die Arbeit der Resultante gleich der Summe der Arbeiten der Komponenten ist, so dafs die Elementararbeit sich ausdrücken läfst durch

$$Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nach der Definition verrichtet eine Kraft, welche normal zum Bahnelement gerichtet ist, keine Arbeit. Zerlegt man eine Kraft in ihre tangentiale und ihre normale Komponente, so braucht man bei Bestimmung der Arbeit auf die letztere keine Rücksicht zu nehmen; die erstere giebt

$$m \frac{dv}{dt} ds = mv . dv = \tfrac{1}{2} d . mv^2, \tag{5}$$

woraus hervorgeht, dafs die von der bewegenden Kraft in der Zeit dt ausgeführte Arbeit genau gleich dem Zuwachs an lebendiger Kraft ist, den das Teilchen in derselben Zeit erfährt. Führt man die Komponenten nach den Axen ein, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} d . mv^2 = Xdx + Ydy + Zdz, \tag{6}$$

eine Gleichung, die man auch erhält, wenn man die ersten Gleichungen (4) beziehungsweise mit dx, dy und

dz multipliciert und addiert, und zugleich beachtet, dafs

$$\tfrac{1}{2} d\,.\,v^2 = \tfrac{1}{2} d\,.\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$
$$= \frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz.$$

7. Die gefundene Gleichung (6) ist namentlich anwendbar, wenn $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, wenn also eine solche Funktion U von x, y und z existirt, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \tag{7}$$

In solchem Falle erhält man durch Integration

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0{}^2) = U - U_0, \tag{8}$$

worin U_0 den Wert von U für einen Punkt bedeutet, in dem die Geschwindigkeit v_0 ist. U heifst die Kräftefunktion oder das Potential der Kräfte.

$$U = \text{const.} \tag{9}$$

ist die Gleichung für eine sogenannte Niveaufläche; für Verschiebungen in einer solchen ist

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

woraus hervorgeht, dafs die Kraft in jedem Punkte des Raumes normal zu der durch den Punkt gehenden Niveaufläche ist.

Kennt man die Kräftefunktion und die absolute Gröfse der Geschwindigkeit des Teilchens an einem Punkte, so ist dadurch die absolute Geschwindigkeit des Teilchens an jedem Punkte des Raumes bestimmt, unabhängig von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. In diesem Sinne kann man von der Geschwindigkeit des Teilchens an einem Punkte sprechen, der nicht in der Bahn des Teilchens liegt, indem man dann diejenige Geschwindigkeit

meint, welche das Teilchen erhalten würde, wenn es durch eine Veränderung der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit dahin gebracht wäre, durch diesen Punkt zu gehen.

Einer der wichtigsten Fälle, in denen ein Potential existiert, ist derjenige, wo die Kräfte gegen feste Mittelpunkte gerichtet und nur von der Entfernung abhängig sind; ist r die Entfernung von einem der Mittelpunkte, während R die Kraft ist, so wird die Elementararbeit Rdr: der Ausdruck Rdr ist aber ein vollständiges Differential, da R eine Funktion von r ist; man hat also

$$\tfrac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \Sigma \int R dr, \tag{10}$$

wo die Summation sich auf alle Mittelpunkte erstreckt und die Integrale von den $v = v_0$ entsprechenden Werten von r an genommen werden. R ist positiv, wenn die Kraft abstofsend, negativ, wenn zie anziehend ist.

ERSTES KAPITEL.

Geradlinige Bewegung eines Teilchens.

8. Der freie Fall. Bewegt sich ein Teilchen von der Masse 1 auf der x-Axe unter dem Einflusse der beschleunigenden Kraft X, so wird die Bewegung desselben bestimmt durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = X. \tag{1}$$

Steht die x-Axe senkrecht, nach unten als positiv genommen, und ist die Schwere die wirkende Kraft, so hat man $X = g$, mithin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,, \quad \text{und daraus} \quad \frac{dx}{dt} = gt + c = v,$$

worin c die Geschwindigkeit bedeutet, welche $t = 0$ entspricht; hieraus erhält man wiederum

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 + ct, \tag{2}$$

worin die Konstante so bestimmt ist, dafs einem $t = 0$ ein $x = 0$ entspricht.

Die Bewegung vollzieht sich mit konstanter Beschleunigung g und mit gleichmäfsig wachsender oder abnehmender Geschwindigkeit; ist c negativ, so wird die Geschwindigkeit Null für

$$t = \frac{-c}{g}; \quad x = -\frac{c^2}{2g};$$

wenn der hierdurch bestimmte Punkt erreicht ist, so beginnt das Teilchen zu fallen, und man erhält wieder $x = 0$ für $t = \frac{-2c}{g}$, so dafs Steigen und Fallen dieselbe Zeit in Anspruch nehmen. Ist das Teilchen zurückgekehrt bis $x = 0$, so ist die Geschwindigkeit $-c$, also der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzt.

Ist das Teilchen ohne Anfangsgeschwindigkeit durch die Strecke x gefallen, so hat man

$$v = gt; \quad x = \tfrac{1}{2}gt^2; \tag{3}$$

hieraus erhält man durch Elimination von t:

$$v^2 = 2gx, \tag{4}$$

eine Gleichung, die sich auch aus (6) ableiten läfst. v heifst hier die der Fallhöhe x entsprechende Geschwindigkeit.

9. Atwoods Fallmaschine. Die Konstante g wird durch Versuche und mit Hülfe der oben gefundenen Formeln bestimmt. Da der Fall jedoch zu rasch vor sich geht, als dafs Versuche ein genaues Resultat ergeben könnten, so vermindert man die Fallgeschwindigkeit mit Hülfe von Atwoods Fallmaschine. Eine Schnur, von deren Gewicht man absehen kann, läuft über eine Rolle und trägt an ihren Enden zwei gleich grofse Massen m. Die Bewegung wird nun dadurch hervorgerufen, dafs auf einer der Massen m ein Übergewicht m_1 angebracht wird. Man hat also auf der einen Seite die Masse $m + m_1$, während die bewegende Kraft gleich $(m + m_1)g - T$ ist, wo T die Spannung der Schnur bedeutet; die Bewegung wird also bestimmt durch

$$(m + m_1)\frac{d^2x}{dt^2} = (m + m_1)g - T,$$

während man für die andere Masse m erhält:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T,$$

da die beiden Massen wegen der konstanten Schnurlänge gleich grofse und entgegengesetzte Beschleunigungen erhalten müssen; nun findet man durch Elimination der unbekannten Spannung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_1}{2m + m_1} g, \tag{5}$$

woraus hervorgeht, dafs die Bewegung dieselbe ist wie die, welche durch die konstante beschleunigende Kraft auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens hervorgebracht werden würde, und diese Kraft kann man durch passende Wahl von m und m_1 so klein machen, wie man will. Für die Spannung der Schnur erhält man, wenn man den Ausdruck für $\frac{d^2x}{dt^2}$ in eine der obigen Gleichungen einsetzt:

$$T = mg\left(1 + \frac{m_1}{2m + m_1}\right).$$

Um die Masse m in Ruhe zu halten, bedarf es einer Spannung mg; der übrige Teil der Spannung giebt dann der Masse m ihre Beschleunigung nach oben; für die Masse $m + m_1$ ist die Spannung dagegen kleiner als das Gewicht, da ihre Beschleunigung nach unten gerichtet ist.

10. Der Fall auf der schiefen Ebene wurde von Galilei benutzt um g zu bestimmen. Das Teilchen läfst sich hier als frei betrachten, wenn die Reaktion der schiefen Ebene hinzugefügt wird, und da diese normal zur Bahn ist (wenn man vom Reibungswiderstande absieht), so hat sie keinen Einflufs auf die Tangentialkraft; man hat deshalb:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{6}$$

wo α den Neigungswinkel der schiefen Ebene und x den vom Teilchen auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weg

bedeutet. Die Bewegung wird also durch dieselben Formeln bestimmt wie beim freien Fall, nur hat man $g \sin \alpha$ an Stelle von g zu setzen. Für die Geschwindigkeit hat man

$$v^2 = 2gx \sin \alpha;$$

ist nun x die Länge der schiefen Ebene, so ist $x \sin \alpha$ die Höhe derselben, so dafs das Teilchen, wenn es die Länge der schiefen Ebene durchläuft, dieselbe Geschwindigkeit (der Gröfse, aber nicht der Richtung nach) erhält, wie wenn es die Höhe der schiefen Ebene durchfallen hätte.

11. Fall in der Luft. Bewegt sich ein Körper in einem homogenen Mittel, so kann man, wie Versuche gezeigt haben, für mittlere Geschwindigkeiten den Widerstand als der Dichtigkeit des Mittels und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional betrachten. Nehmen wir an, der Körper sei eine Kugel, so wird der Widerstand zugleich proportional dem Inhalt eines gröfsten Kreises und kann ausgedrückt werden durch

$$\lambda r^2 \rho v^2,$$

wo r den Radius der Kugel, ρ die Dichtigkeit des Mittels und λ eine Konstante bedeutet; ist ρ_1 die Dichtigkeit der Kugel, so ist ihre Masse $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$; der Widerstand für die Einheit der Masse ist also

$$\frac{\mu \rho v^2}{\rho_1 r},$$

wo μ eine Konstante bedeutet. Man darf annehmen, dafs der Widerstand im Mittelpunkte der Kugel wirksam und dafs seine Richtung derjenigen der Geschwindigkeit entgegengesetzt ist.

Statt der Kugel können wir nun ein Teilchen von der Masse 1 betrachten, welches im Mittelpunkte der

Kugel angebracht ist; der Widerstand läfst sich bezeichnen durch

$$\frac{v^2}{k^2}g,$$

wo k diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, die das Teilchen haben müfste, damit der Widerstand genau gleich dem Gewichte wird; für die Bewegung senkrecht nach unten hat man dann

$$\frac{dv}{dt} = g - g\frac{v^2}{k^2} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2), \tag{7}$$

woraus

$$\frac{2g\,dt}{k} = \frac{dv}{k-v} + \frac{dv}{k+v},$$

mithin

$$\frac{2gt}{k} = l\,\frac{k+v}{k-v},$$

wo die Konstante so bestimmt ist, dafs $v = 0$ einem $t = 0$ entspricht; hieraus erhält man

$$\frac{k+v}{k-v} = \frac{e^{\frac{gt}{k}}}{e^{-\frac{gt}{k}}}$$

oder

$$v = k\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}} = \frac{dx}{dt}, \tag{8}$$

und hieraus wieder

$$x = \frac{k^2}{g}\,l\,\frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}, \tag{9}$$

wo die Konstante so bestimmt ist, dafs $x = 0$ einem $t = 0$ entspricht.

Eine Gleichung zwischen v und x läfst sich finden, wenn man t zwischen (8) und (9) eliminiert; leichter findet man dieselbe jedoch, wenn man einen anderen Aus-

druck für die beschleunigende Kraft benutzt, nämlich (1)

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2),$$

woraus

$$x = \frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{k^2}{k^2 - v^2}; \tag{10}$$

dieser Ausdruck zeigt, dafs k die Grenze für die Geschwindigkeit ist, wenn x bis ins unendliche wächst.

Für die Bewegung nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit $-a$, die $x = 0$ und $t = 0$ entspricht, hat man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 + v^2), \tag{11}$$

woraus

$$\frac{gdt}{k} = \frac{kdv}{k^2 + v^2},$$

oder

$$\frac{gt}{k} = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} = \operatorname{arc\,tg}\frac{kv + ka}{k^2 - va},$$

mithin

$$\frac{kv + ka}{k^2 - va} = \frac{\sin\frac{gt}{k}}{\cos\frac{gt}{k}},$$

oder

$$v = k\,\frac{k\sin\frac{gt}{k} - a\cos\frac{gt}{k}}{a\sin\frac{gt}{k} + k\cos\frac{gt}{k}} = \frac{dx}{dt}, \tag{12}$$

woraus sich wieder ergiebt

$$x = -\frac{k^2}{g}\, l\left(\frac{a}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right). \tag{13}$$

Eine Gleichung zwischen v und x erhält man aus

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{g}{k^2}(k^2 + v^2), \tag{14}$$

woraus

$$x = \frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{v^2 + k^2}{a^2 + k^2}. \tag{15}$$

Die gefundenen Gleichungen lassen sich nur solange benutzen, bis die Geschwindigkeit Null wird; dies geschieht, wie (12) zeigt, wenn die Zeit

$$t_1 = \frac{k}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k}, \tag{16}$$

wird; der entsprechende Wert von x ist

$$x_1 = -\frac{k^2}{2g}\, l\, \frac{a^2 + k^2}{k^2}. \tag{17}$$

Darauf setzt sich die Bewegung in entgegengesetzter Richtung fort und wird, wenn man den höchsten Punkt zum Anfangspunkt nimmt, durch die früher gefundenen Formeln für die abwärts gerichtete Bewegung bestimmt; wenn das Teilchen seinen Ausgangspunkt wieder erreicht, so ist die Geschwindigkeit

$$a_1 = \frac{ak}{\sqrt{a^2 + k^2}}, \tag{18}$$

also kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit; die Zeit, welche während des Fallens verfliefst, erhält man, wenn man in die Gleichung

$$\frac{2gt}{k} = l\, \frac{k + v}{k - v}$$

a_1 statt v einsetzt; dadurch erhält man

$$t_2 = \frac{k}{g} \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{k}. \tag{19}$$

Diese Zeit ist gröfser als t_1, denn aus

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} > \frac{1}{1 + z^2}$$

folgt, wenn man mit dz multipliciert und integriert (alle Elemente sind positiv zu nehmen),

$$l(z+\sqrt{1+z^2}) > \operatorname{arc\,tg} z;$$

für $z = \frac{a}{k}$ folgt hieraus $t_2 > t_1$.

12. Fall in gröſserem Abstande von der Erdoberfläche. Ein Teilchen von der Masse 1 befinde sich in Ruhe in einem Abstande a vom Mittelpunkte der Erde; fällt dasselbe nun (ohne Luftwiderstand) durch die Strecke x, so ist die beschleunigende Kraft, welche sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung ändert,

$$\varphi = \frac{r^2}{(a-x)^2} g = \frac{v dv}{dx}, \tag{20}$$

wo r den Erdradius bedeutet; hieraus findet man, da für $x = 0$ auch $v = 0$ ist,

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \frac{x}{a-x}, \tag{21}$$

und darauf

$$r\sqrt{\frac{2g}{a}}\, dt = \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\sqrt{ax-x^2}} dx + \frac{\frac{1}{2}a dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

woraus

$$r\sqrt{\frac{2g}{a}}\, t = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a-2x}{a}; \tag{22}$$

hierin ist die Konstante so bestimmt, daſs $x = 0$ einem $t = 0$ entspricht.

13. Fall innerhalb der Erdoberfläche. Betrachten wir die Erde als eine homogene Kugel, so ist die Anziehung innerhalb der Oberfläche proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte (Statik, 106); ist diese Entfernung x, so haben wir

$$\varphi = \frac{v dv}{dx} = -\frac{gx}{r}, \tag{23}$$

woraus

$$v^2 = \frac{g}{r}(r^2 - x^2); \tag{24}$$

die Konstante ist hier so bestimmt, dafs $v = 0$ ist für $x = r$. Hieraus erhält man

$$dt = \mp \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

wobei das obere Vorzeichen für abnehmende, das untere für wachsende x gilt; die Integration giebt nun, wenn $x = r$ für $t = 0$ werden soll,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \frac{x}{r}. \tag{25}$$

Diese Formel, welche, wenn der Winkel als beständig wachsend genommen wird, für die ganze Bewegung gilt, zeigt, dafs diese Bewegung in periodischen Schwingungen zwischen $x = +r$ und $x = -r$ besteht; für eine Schwingung zwischen diesen beiden Lagen ist eine Zeit erforderlich, die ausgedrückt wird durch

$$\pi \sqrt{\frac{r}{g}}; \tag{26}$$

für $x = 0$ ist die Geschwindigkeit ein Maximum.

Es erteilt also eine Anziehung, welche der Entfernung proportional ist, dem Teilchen eine Bewegung, welche in periodischen Schwingungen um den Anziehungsmittelpunkt mit gleich grofsen Ausschlägen nach beiden Seiten besteht.

14. Bewegung zwischen zwei Anziehungsmittelpunkten. Der eine Anziehungsmittelpunkt möge im Anfangspunkte liegen, während der andere die Abscisse a habe. Die Anziehungen der beiden Mittelpunkte in der Entfernung 1 seien beziehungsweise α^2 und β^2, das Gesetz der Anziehung sei das natürliche. Ist x die Abscisse des Teilchens, so hat man ($x < a$)

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{\beta^2}{(a-x)^2} - \frac{\alpha^2}{x^2}, \tag{27}$$

und daraus

$$v^2 = \frac{2\beta^2}{a-x} + \frac{2\alpha^2}{x} + \gamma, \tag{28}$$

wo γ eine Konstante bedeutet, die sich bestimmen läfst, wenn man ein Paar zusammengehöriger Werte von v und x kennt.

Die Zeit wird im allgemeinen durch ein elliptisches Integral ausgedrückt; hiervon macht jedoch der besondere Fall eine Ausnahme, wo die Geschwindigkeit Null ist in demjenigen Punkte, in welchem die beiden Anziehungen gleich grofs und entgegengezetzt sind, und dieser Punkt wird durch die Gleichung

$$\frac{\beta}{a-x} = \frac{\alpha}{x},$$

bestimmt; hieraus folgt

$$x = \frac{a\alpha}{\alpha+\beta}; \tag{29}$$

daraus ergiebt sich

$$\frac{2(\alpha+\beta)^2}{a} + \gamma = 0,$$

und hierdurch wieder

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\,.\,v = \pm\frac{(\alpha+\beta)x - a\alpha}{\sqrt{ax-x^2}}, \tag{30}$$

wo die Integration, wenn man $\frac{dx}{dt}$ an Stelle von v setzt, sich ausführen läfst ohne Benutzung von elliptischen Integralen.

15. Bewegung in einem widerstehenden Mittel. Das Teilchen möge für $x=0$ und $t=0$ eine Geschwindigkeit a haben und nur beeinflufst werden von dem Widerstande des Mittels, welcher der m^{ten} Potenz der Geschwindigkeit

proportional sein möge; dann hat man, wenn k eine positive Konstante bedeutet, $\left(m \gtrless 1\right)$

$$\frac{dv}{dt} = -kv^m, \tag{31}$$

woraus

$$k(1-m)t = a^{1-m} - v^{1-m}. \tag{32}$$

Ist nun m positiv und kleiner als 1, so wird v Null nach Ablauf einer endlichen Zeit. Von diesem Augenblich an mufs das Teilchen in Ruhe bleiben, so dafs die gefundene Gleichung nicht für die folgende Zeit gilt; für diese gilt jedoch die partikuläre Auflösung $v = 0$ der Differentialgleichung.

Anwendungen.

1. Auf der einen Schale einer Wage befindet sich eine Person und ein Gewicht mg, während durch Gewichte auf der anderen Schale Gleichgewicht hergestellt ist; was geschieht, wenn die Person das Gewicht aufhebt?

Erhält das Gewicht für die Zeit t die Geschwindigkeit v, so wird die von der Person angewandte Kraft gleich $mg + m\frac{dv}{dt}$; der Druck auf die Schale wird also auf Grund der Reaktion um $m\frac{dv}{dt}$ vermehrt.

2. Zwei Teilchen mit den Massen m und m_1 bewegen sich mit gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten gegen einander und ziehen sich nach einem beliebigen Gesetze an. Man bestimme die Bewegung des Schwerpunktes der Gesamtmasse.

3. Eine Kugel, deren Dichtigkeit proportional der Entfernung vom Mittelpunkte ist, ist von einem dünnen

Rohre centrisch durchbohrt. Die Masse der Kugel zieht ein Teilchen nach dem natürlichen Anziehungsgesetze an. Bestimme die Bewegung des Teilchens im Rohre, wenn die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel Null ist.

4. Die Bewegung eines Teilchens ist bestimmt durch die Gleichung

$$kt^2 = a^2(x^2 - a^2);$$

bestimme die Geschwindigkeit als Funktion von x.

5. Bestimme die Bewegung eines schweren Teilchens, das eine rauhe schiefe Ebene hinunterfällt; der Neigungswinkel ist α und der Reibungskoefficient μ.

6. Bestimme die Bewegung eines Teilchens, welches ohne Anfangsgeschwindigkeit zu besitzen von einem Punkte angezogen wird, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Verbindungslinie von Teilchen und Punkt bewegt. Die Anziehung ist die natürliche.

7. Von einem gegebenen Punkte aus fallen gleichzeitig schwere Teilchen längs verschiedenen von dem Punkte ausgehenden Geraden; bestimme den geometrischen Ort der Punkte, welche die Teilchen gleichzeitig einnehmen. Der Widerstand der Luft bleibt unberücksichtigt.

8. Welche Neigung mufs man einer schiefen Ebene von gegebener Basis geben, damit der Fall längs der Länge der schiefen Ebene in möglichst kurzer Zeit vor sich geht?

9. Bestimme die Bewegung und die Spannung bei der losen Rolle, wenn die Kraft K und die Last L ist. Von Luft- und Reibungswiderstand, sowie von dem Gewicht der Schnur und der Rolle ist abzusehen.

10. Ein homogener Faden, dessen Länge und Gewicht gegeben sind, beginnt zu fallen während seine eine Hälfte auf einem horizontalen Tische liegt und die andere frei über die Tischkante hinüber hängt. Vom Reibungswiderstande ist abzusehen. Man bestimme die Bewegung.

11. Ein Teilchen, das sich in Ruhe befindet, wird von einem Punkte im Abstande a mit einer Kraft angezogen, welche dem Abstande umgekehrt proportional ist. Für welchen Wert von α wird die Zeit ein Maximum, welche das Teilchen gebraucht um die Strecke zwischen denjenigen beiden Punkten zu durchlaufen, deren Abstände vom Anziehungsmittelpunkt αa und $\alpha^2 a$ sind?

12. Die Gleichung (30) soll näher untersucht werden, namentlich mit Bezug auf die Vorzeichen.

ZWEITES KAPITEL.

Freie krummlinige Bewegung eines Teilchens.

---

16. Wurfbewegung im leeren Raume. Ein Teilchen wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit a geworfen, die einen Winkel α mit der horizontalen x-Axe bildet; diese liegt in der durch die Anfangsgeschwindigkeit und die Richtung der Schwere bestimmten Ebene; ist die y-Axe aufwärts gerichtet, so hat man für die Bestimmung der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g; \tag{1}$$

hieraus ergiebt sich

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\alpha; \quad \frac{dy}{dt} = -gt + a\sin\alpha, \tag{2}$$

$$x = at\cos\alpha; \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + at\sin\alpha, \tag{3}$$

wo die ersten Konstanten durch die gegebene Anfangsgeschwindigkeit bestimmt sind, und die letzten dadurch, daſs $x = 0$, $y = 0$ einem $t = 0$ entsprechen.

Die Elimination von t liefert die Gleichung der Bahn:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha}, \tag{4}$$

welche einer Parabel mit vertikaler Axe angehört; der zweite Schnittpunkt derselben mit der x-Axe wird bestimmt durch

$$x_1 = \frac{a^2}{g} \sin 2\alpha; \tag{5}$$

x_1 heifst die Wurfweite; ist α variabel, so wird die Wurfweite ein Maximum für $\alpha = 45°$ und erhält dieselbe Gröfse für Winkel, welche um gleichviel von 45° nach beiden Seiten hin abweichen; die halbe Wurfweite ist die Abscisse des Scheitelpunktes, der durch

$$x_2 = \frac{a^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha; \quad y_2 = \frac{a^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

bestimmt wird. Addiert man ein Viertel des Parameters zu der Ordinate des Scheitelpunktes, so findet man die Höhe der Direktrix, nämlich

$$\frac{a^2}{2g} \sin^2 \alpha + \frac{a^2}{2g} \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{2g};$$

dieselbe ist also unabhängig von α. Der geometrische Ort der Scheitelpunkte ist eine Ellipse, während derjenige der Brennpunkte ein Kreis ist.

Soll die Parabel durch einen gegebenen Punkt (x, y) gehen, so findet man aus der Gleichung der Parabel

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{g} \pm \sqrt{\frac{a^4}{g^2} - \frac{2a^2}{g} y - x^2};$$

hieraus geht hervor, dafs die Lösung unmöglich ist, wenn der Punkt aufserhalb der Parabel

$$g^2 x^2 + 2a^2 g y = a^4$$

liegt, während man für Punkte auf dieser Parabel eine, und für Punkte innerhalb derselben zwei Lösungen erhält. Diese Parabel mufs deshalb die Enveloppe der einem variablen α entsprechenden Trajektorien sein, was sich auch leicht direkt nachweisen läfst.

17. Wurfbewegung in der Luft. Die wirkenden Kräfte sind die Schwere und der Luftwiderstand, den wir wie oben mit $\frac{gv^2}{k^2}$ bezeichnen; derselbe wirkt in der

Tangente der Bahn, der Bewegung entgegen; am zweckmäfsigsten benutzt man die senkrecht auf den wirkenden Kräften stehenden Komponenten der beschleunigenden Kräfte; dadurch erhält man, wenn α den Winkel bedeutet, welchen die Tangente mit der x-Axe bildet,

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d \cdot v\cos\alpha}{dt} &= -\frac{gv^2}{k^2}\cos\alpha \\ \frac{v^2}{\rho} &= g\cos\alpha \end{aligned}\right\}; \tag{6}$$

die erste von diesen Gleichungen ergiebt

$$\frac{d \cdot v\cos\alpha}{v\cos\alpha} = -\frac{g}{k^2}vdt = -\frac{g}{k^2}ds,$$

woraus

$$v\cos\alpha = he^{\frac{-gs}{k^2}}, \tag{7}$$

worin h die $s = 0$ entsprechende horizontale Komponente der Geschwindigkeit bedeutet.

In der zweiten Gleichung (6) ist ρ positiv, da $\cos\alpha$ positiv ist; man hat deshalb, da wachsende s abnehmende α geben,

$$ds = -\rho d\alpha,$$

so dafs die Gleichung sich verwandelt in

$$v^2\frac{d\alpha}{ds} = -g\cos\alpha;$$

hieraus eliminiert man v mit Hülfe von (7) und erhält

$$\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = -\frac{g}{h^2}e^{\frac{2gs}{k^2}}ds;$$

setzt man $\operatorname{tg}\alpha = p$, so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{h^2}e^{\frac{2gs}{k^2}}ds; \tag{8}$$

hieraus erhält man

$$C + p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) = -\frac{k^2}{h^2} e^{\frac{2gs}{k^2}}, \quad (9)$$

worin die Konstante C sich durch die Richtung der $s = 0$ entsprechenden Anfangsgeschwindigkeit bestimmen läſst. Die Formel zeigt, daſs s und p gleichzeitig bis ins unendliche wachsen, so daſs die Bewegung sich einer vertikal abwärts gerichteten nähert.

Die Koordinaten lassen sich durch p ausdrücken, nämlich

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}} = -\frac{h^2}{g} e^{-\frac{2gs}{k^2}} dp$$

und $\qquad dy = pdx,$

oder, wenn man die Potenz von e mit Hülfe von (9) eliminiert,

$$dx = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dp}{-P}; \quad dy = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{pdp}{-P}, \quad (10)$$

wo $-P$ die linke Seite der Gleichung (9) bedeutet. Die Integrationen lassen sich nur näherungsweise ausführen. Für die Bestimmung von t erhält man aus (6)

$$dt = \sqrt{-\frac{dsda}{g \cos a}},$$

wo dt und da entgegengesetzte Vorzeichen haben, so daſs man erhält, wenn man den Wert für ds aus (8) einsetzt,

$$dt = -\frac{h}{g} e^{\frac{-gs}{k^2}} \frac{da}{\cos^2 a} = -\frac{h}{g} e^{\frac{-gs}{k^2}} dp,$$

und daraus wieder durch Elimination der Potenz von e:

$$dt = -\frac{k}{g} \frac{dp}{\sqrt{P}}. \quad (11)$$

Aus den Ausdrücken für dx, dy und dt findet man ferner:

$$v^2 = \frac{k^2(1+p^2)}{P}. \quad (12)$$

Die absteigende Ast der Kurve hat eine Asymptote; die sich annäherungsweise bestimmen läfst; wenn p sehr grofs ist, so kann man $P = p^2$ setzen und erhält dann

$$dx = -\frac{k^2}{g}\frac{dp}{p^2},$$

mithin

$$x - x_1 = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right),$$

worin x_1 den Wert von x bedeutet, der p_1 entspricht; p_1 bezeichnet irgend einen grofsen Wert von p. Diese Gleichung zeigt, dafs x endlich bleibt, wenn p bis ins unendliche wächst.

18. Centralbewegung heifst eine Bewegung, bei der die Kraft gegen einen festen Punkt (oder von demselben weg), das Centrum, gerichtet ist, und der Gröfse nach nur von der Entfernung des Teilchens vom Centrum abhängig ist.

Wir haben früher (Kinematik, S. 39) gezeigt, dafs der Radiusvektor bei einer solchen Bewegung Flächen beschreibt, welche der benutzten Zeit proportional sind. Hier wollen wir einen analytischen Beweis desselben Satzes führen.

Das Centrum sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und das Teilchen habe die Koordinaten x, y, z; dafs die Kraft durch den Anfangspunkt geht, wird dann ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z} \tag{13}$$

oder

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

von denen jedoch nur zwei von einander unabhängig sind; durch Integration erhält man:

$$xdy - ydx = c_1\,dt; \quad ydz - zdy = c_2\,dt;$$
$$zdx - xdz = c_3\,dt.$$

Die sich hieraus ergebende Gleichung

$$c_2 x + c_3 y + c_1 z = 0$$

zeigt, dafs die Bewegung in einer durch das Centrum gehenden Ebene vor sich geht. Auch ist es einleuchtend, dafs das Teilchen niemals die Ebene verlassen kann, welche durch das Centrum und ein Bahnelement bestimmt ist.

Nimmt man die Ebene der Bahn zur xy-Ebene, so hat man, wenn c ein Konstante bedeutet,

$$xdy - ydx = cdt; \tag{14}$$

der Ausdruck auf der linken Seite stellt hier das doppelte des vom Radiusvektor in der Zeit dt beschriebenen Flächenelements dar, so dafs wir nur zu integrieren brauchen, um den angeführten Satz

$$F = \tfrac{1}{2}ct \tag{15}$$

zu erhalten, wo F die beschriebene Fläche, von der $t = 0$ entsprechenden Lage des Radiusvektor an gerechnet, bedeutet. Die Gleichung zeigt, dafs $\frac{1}{2}c$ die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche darstellt. Wie in der Kinematik gezeigt wurde, läfst sich der Satz auch ausdrücken durch die Gleichung

$$v = \frac{c}{p}, \tag{16}$$

wo p der Abstand der Tangente vom Centrum ist.

Ist R die absolute Gröfse der Kraft, so wird unter der Voraussetzung, dafs die Kraft gegen das Centrum gerichtet ist, die Elementararbeit dargestelt durch

$$-Rdr,$$

so dafs man hat

$$dv^2 = -2Rdr$$

oder

$$v^2 = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} Rdr, \tag{17}$$

worin v_0 die $r = r_0$ entsprechende Geschwindigkeit bedeutet.

Die beiden Gleichungen (14) und (17) werden benutzt um die Bahn zu bestimmen, wenn die Kraft gegeben ist, und umgekehrt. Nimmt man Polarkoordinaten, so verwandeln die Gleichungen sich in

$$r^2 d\theta = cdt \text{ und } \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -2\int Rdr, \tag{18}$$

wo die Konstante noch zu ergänzen ist. Durch Elimination von dt ergiebt sich

$$\int Rdr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^4}\right) = -\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right], \tag{19}$$

und hieraus wieder durch Differentiation mit Bezug auf r

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]. \tag{20}$$

Ist die Bahn bekannt, so dient (20) (Formel von Binet) zur Bestimmung der Kraft, indem man θ mit Hülfe der Gleichung der Bahn fortschafft. Gewöhnlich jedoch wird die Rechnung leichter, wenn man (19) benutzt und nach Elimination von θ nach r differentiiert.

Ist R als Funktion von r gegeben, so haben wir in (19) die Differentialgleichung der Bahn. Ist diese integriert, so kann man aus den beiden Gleichungen (18) r und θ als Funktionen von t bestimmen.

Wir haben gesehen, dafs $\frac{1}{2}c$ die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche bedeutet. Kennt man die $r = r_0$

entsprechende Geschwindigkeit und den Winkel, welchen sie mit r_0 bildet, so kann man c aus (16) bestimmen, nämlich

$$c = v_0 p_0 = r_0 v_0 \sin \alpha. \tag{21}$$

Bei der Behandlung der beiden Gleichungen (18) eliminierten wir dt. Man kann auch $d\theta$ eliminieren und erhält dann

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = -2\int R dr; \tag{22}$$

hierdurch wird r als Funktion von t bestimmt, worauf die erste Gleichung (18) θ als Funktion von t liefert.

Nun mögen einige Anwendungen der gefundenen Formeln folgen.

19. Die Bahn ist ein Kegelschnitt und die Kraft gegen einen Brennpunkt gerichtet. Die Polargleichung des Kegelschnittes ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)};$$

am leichtesten läfst sich Gleichung (20) benutzen; sie ergiebt, da

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{a(1 - e^2)},$$

dafs

$$R = \frac{c^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{23}$$

worin T die Umlaufszeit bedeutet.

20. Die Kraft ist dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional.

Die Kraft sei $\frac{\mu}{r^2}$; dann hat man (17)

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - k, \tag{24}$$

wo k eine Konstante bedeutet. Dadurch erhält man die

Differentialgleichung der Bahn, und diese nimmt, wenn wir z für $\frac{1}{r}$ einsetzen, folgende Form an:

$$d\theta = \frac{\mp c dz}{\sqrt{-k + 2\mu z - c^2 z^2}};$$

hier ist $+$ zu nehmen, wenn z wächst, und $-$, wenn z abnimmt; während θ wächst, wird das Vorzeichen verändert, wenn z ein Maximum oder Minimum passiert, und dies findet statt, wenn der Radikand des Divisors Null wird. Bei der Integration kann die Konstante fortgelassen werden, wenn die Richtung der Axe in passender Weise gewählt wird; dann erhält man

$$\theta = \arccos \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - kc^2}};$$

da das hieraus bestimmte $d\theta$ sein Vorzeichen wechseln soll, wenn $\sin\theta$ sein Vorzeichen wechselt, also wenn $\cos^2\theta = 1$, und dieses statfindet, wenn der Radikand oben Null ist, so gilt die gefundene Formel für die ganze Bewegung; wird wieder r eingeführt, so erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - kc^2}}{c^2} \cos\theta;$$

dieses ist die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkt zum Pol genommen ist; man hat dann

$$\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)}; \quad \sqrt{1 - \frac{kc^2}{\mu^2}} = e. \qquad (25)$$

Der Kegelschnitt ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem k positiv, Null oder negativ ist. Hieraus ersieht man, wenn man den Ausdruck für k (24) betrachtet, daſs die Bahn für dieselbe Kraft die Form jedes der drei Kegelschnitte annehmen kann; dies hängt nämlich von der einem beliebigen r entsprechenden absoluten Gröſse der Geschwindigkeit ab.

21. Das Keplersche Problem. Hierunter versteht man die Aufgabe, die Koordinaten der Planeten durch die Zeit auszudrücken. Man zieht es hierbei vor statt θ, der wahren Anomalie, einen anderen Winkel u, die excentrische Anomalie, zu suchen.

Wir denken uns, während der Planet seine Ellipse durchläuft, einen Punkt, welcher einen Kreis über der grofsen Axe der Ellipse als Durchmesser so durchläuft, dafs er und der Planet beständig dieselbe Projektion auf die Axe haben; von dem Punkte ziehen wir eine Linie an den Mittelpunkt, und u ist dann der Winkel, den diese Linie mit der Axe bildet; die positive Richtung der Axe wird gegen das Perihel (den Scheitelpunkt, welcher der Sonne am nächsten liegt) genommen. Man hat dann

$$r = a(1 - e\cos u), \tag{26}$$

Aus (25) ergiebt sich

$$c^2 = \mu a(1 - e^2); \quad k = \frac{\mu^2}{c^2}(1 - e^2) = \frac{\mu}{a};$$

hierdurch und weil

$$-2\int R dr = \frac{2\mu}{r} - k = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

ergiebt sich aus (22):

$$dt = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - e\cos u)\, du;$$

da wir $u = 0$ für $t = 0$ haben, so finden wir hieraus, wenn wir

$$a^3 = \frac{\mu}{n^2}$$

setzen, durch Integration, dafs

$$nt = u - e\sin u; \tag{27}$$

dies ist eine transscendente Gleichung für die Bestim-

mung von u. Aus u findet man r durch (26) und θ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u, \tag{28}$$

die sich leicht ableiten läfst. Die Geschwindigkeit wird bestimmt durch

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{29}$$

22. Die Anziehung ist proportional der Entfernung. Für diesen Fall benutzt man am zweckmäfsigsten die Komponenten nach den Axen; ist μ^2 die Anziehung in der Entfernung 1, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2 y = 0,$$

woraus durch Integration

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t,$$
$$y = C\cos\mu t + D\sin\mu t.$$

Nehmen wir an, für $t = 0$ sei $x = a$, $y = 0$, und die Geschwindigkeit v_0 sei senkrecht zur x-Axe gerichtet, so zeigen die Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$, dafs

$$B = 0; \quad \mu D = v_0,$$

während die Ausdrücke für x und y ergeben, dafs

$$A = a, \quad C = 0,$$

so dafs die Bewegung bestimmt wird durch

$$x = a\cos\mu t; \quad y = \frac{v_0}{\mu}\sin\mu t.$$

Die Elimination von t zeigt, dafs die Bahn eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt mit dem Anziehungsmittelpunkt zusammenfällt. Wenn μt einen Zuwachs von 2π erfährt, so erhalten x und y dieselben Werte wieder, so dafs die Zeit eines Umlaufes gleich ist

$$\frac{2\pi}{\mu}.$$

Anwendungen.

1. Zwei Teilchen werden gleichzeitig von demselben Punkt aus und in derselben Richtung geworfen, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Bestimme die Richtung der Geraden, welche gleichzeitige Lagen der beiden Teilchen verbindet.

In dieser und in den folgenden Aufgaben ist vom Luftwiderstande abzusehen. In 1—5 sind die Teilchen als schwer anzunehmen.

2. Mehrere Teilchen werden gleichzeitig von demselben Punkte aus mit Anfangsgeschwindigkeiten geworfen, die in einer Ebene liegen. Zeige, dafs alle Teilchen gleichzeitig in einer Ebene liegen und dafs die Ebenen, welche verschiedenen Zeiten entsprechen, parallel sind.

3. Ein geworfenes Teilchen hat an zwei Punkten seiner Bahn die Geschwindigkeiten v_1 und v_2. Bestimme den Höhenunterschied der beiden Punkte.

4. Von einem Punkte aus werden gleichzeitig mehrere Teilchen mit gleichgrofsen Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen geworfen. Beweise, dafs die Teilchen sich in jedem Augenblick auf einer Kugeloberfläche befinden, deren Mittelpunkt derjenige Punkt ist, in welchem sich ein gleichzeitig frei fallendes Teilchen befindet.

5. Die Bahn eines geworfenen Teilchens wird von zwei Parallelen geschnitten. Beweise, dafs die zwischen den Parallelen abgeschnittenen Bogen in gleichen Zeiten durchlaufen werden.

6. Ein Teilchen beschreibt eine Ellipse unter dem Einflusse einer Kraft, die senkrecht zur grofsen Axe gerichtet ist. Bestimme die Gröfse der Kraft.

7. Ein Teilchen beschreibt eine Cykloide unter dem Einflusse einer Kraft, die parallel zur Basis der Cykloide gerichtet ist. Bestimme die Gröfse der Kraft.

8. Ein Teilchen bewegt sich von einem gegebenen Punkt aus mit der Geschwindigkeit c parallel zu einer gegebenen Geraden und wird gleichzeitig von der gegebenen Geraden mit einer senkrecht zu ihr gerichteten Kraft angezogen, welche dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional ist. Bestimme die Bahn.

9. Ein Teilchen beschreibt eine Kreisperipherie; die Kraft ist gegen die Mitte eines gegebenen Radius gerichtet. Bestimme die Kraft und die Geschwindigkeit, wenn a der Radius und T die Umlaufszeit ist.

10. Ein Teilchen beschreibt eine Lemniskate; die Kraft ist gegen den Doppelpunkt gerichtet; bestimme deren Gröfse und die Geschwindigkeit.

11. Bestimme die Kraft, wenn die Bahn eine logarithmische Spirale und die Kraft gegen den Pol dieser Spirale gerichtet ist.

12. Bestimme die Bahn, wenn die Kraft gegen einen festen Punkt gerichtet und dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional ist.

13. Bestimme die Bahn eines Teilchens, wenn die Kraft in jedem Punkte der Gröfse und Richtung nach durch den Krümmungsradius bestimmt wird.

14. Ein Teilchen wird von n festen Centren angezogen; die Anziehung ist der Entfernung proportional und beträgt k in der Entfernung 1. Bestimme die Bewegung.

15. Ein Teilchen wird von einem festen Centrum angezogen; die Kraft ist

$$\frac{k}{r} + \frac{k^2}{2r^3},$$

wo k eine Konstante bedeutet. Für $t = 0$ ist $r = a$ und die Geschwindigkeit

$$\frac{k}{a\sqrt{2}}$$

senkrecht zum Radiusvektor gerichtet. Bestimme die Bewegung.

16. Für die Kraft bei einer Centralbewegung leite man folgenden Ausdruck ab:

$$R = \frac{c^2}{p^3}\frac{dp}{dr};$$

p ist der Abstand der Tangente von Centrum.

17. Ein Teilchen wird von einem festen Punkte nach Newtons Gesetz angezogen. Für einen gegebenen Punkt der Bahn kennt man die absolute Gröſse der Geschwindigkeit, aber nicht deren Richtung. Unter der Voraussetzung, daſs die Bahn eine Ellipse ist, soll die groſse Axe derselben, sowie der geometrische Ort für den nicht festen Brennpunkt gesucht werden.

18. Bestimme die Enveloppe für das in der vorhergehenden Aufgabe angeführte System von Ellipsen.

19. Von einem festen Punkte A aus wird AB gleich und parallel der Geschwindigkeit eines Planeten in einem Punkte seiner Bahn gezogen. Bestimme den geometrischen Ort für B (Hodograph der Bahn).

20. Bestimme die Geschwindigkeiten der Erde in den Scheitelpunkten der Bahn, wenn $e = 0{,}0168$, $T =$

365,2564 mittlere Sonnentage und wenn die grofse Halbaxe zu 21 Millionen geographische Meilen gerechnet wird.

21. Beweise, dafs bei jeder Bewegung

$$v^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 . r^2}{dt^2} - rR,$$

wo r den Radiusvektor (für einen beliebigen Pol) und R die Projektion der Kraft auf r bedeutet.

DRITTES KAPITEL.

Bewegung eines gebundenen Punktes.

Bewegung eines Punktes, der an eine Kurve gebunden ist.

23. Der Punkt läſst sich als frei betrachten, wenn wir die Reaktion der Kurve hinzufügen; ist diese N, und bildet sie mit den Axen die Winkel α, β und γ, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma. \quad (1)$$

Ist die Kurve glatt, so daſs sie nur eine normale Reaktion ausübt, so können wir das Princip der lebendigen Kraft benutzen; dadurch erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\,d\,.\,v^2 = Xdx + Ydy + Zdz; \quad (2)$$

die Glieder nämlich, welche N enthalten, fallen fort, da N, als normal zur Kurve, keine Arbeit ausführt; dies folgt auch daraus, daſs die Gleichung

$$dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma = 0$$

ausdrückt, N liege in der Normalebene.

Nun haben wir für die Bestimmung von x, y und z drei gleichzeitige Gleichungen, nämlich (2) nebst den beiden Gleichungen der Kurve. Die Konstanten lassen sich in der Regel dadurch bestimmen, daſs man Lage und Geschwindigkeit des Punktes für einen gewissen

Zeitpunkt kennt. Ist die rechte Seite von (2) ein vollständiges Differential, so läfst die eine Integration sich gleich ausführen, und die in 7 mit Bezug auf einen freien Punkt gemachten Bemerkungen gelten auch für den gebundenen Punkt.

Ist die Bewegung bestimmt, so kann man den Druck durch die Gleichungen (1) bestimmen oder häufig leichter durch folgende Betrachtung: wenn der Punkt als frei betrachtet wird, so sind die Reaktion der Kurve und die normale Komponente der gegebenen Kräfte die Normalkräfte; diese beiden Kräfte liegen beide in der Normalebene, haben aber in der Regel verschiedene Richtungen; ist aber der Punkt frei, so wissen wir, dafs die normale Komponente die Centripetalkraft $\frac{v^2}{\rho}$ ist. Hieraus folgt also:

Die Centripetalkraft ist die geometrische Summe aus der Normalkraft und der Reaktion der Kurve.

Hierdurch nun bestimmt man leicht die letztere (welche gleich dem Druck des Teilchens auf die Kurve mit entgegengesetztem Vorzeichen ist), wenn erst die Bewegung in der Bahn bestimmt ist.

Einige Anwendungen mögen jetzt folgen.

24. Das einfache Pendel besteht aus einem schweren Punkte, der an einen vertikalen Kreis gebunden ist. Wählen wir die Ebene dieses Kreises zur xz-Ebene, die Richtung der z-Axe entgegengesetzt derjenigen der Schwere, und nehmen wir den niedrigsten Punkt des Kreises zum Anfangspunkt, so wird die Gleichung des Kreises

$$x^2 + z^2 = 2az, \tag{3}$$

wo a den Radius des Kreises oder die Pendellänge bedeutet.

Das Princip der lebendigen Kraft ergiebt:

$$\tfrac{1}{2} d \,.\, v^2 = -g dz \quad \text{oder} \quad v^2 = 2g(h-z), \tag{4}$$

wo h die Höhe bezeichnet, welche $v = 0$ entspricht. Da die Geschwindigkeit unabhängig von der Form der Kurve ist und nur abhängig von der Höhe des Punktes, so kann h recht wohl gröfser als der Durchmesser des Kreises sein.

Setzen wir nun

$$v^2 = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}$$

und eliminieren dx mit Hülfe der Gleichung des Kreises, so erhalten wir

$$\frac{a^2}{2az - z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(h-z),$$

und daraus

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z(2a-z)(h-z)}}, \tag{5}$$

worin das obere Vorzeichen für die aufsteigende, das untere für die absteigende Bewegung zu nehmen ist.

Wir erhalten also die Zeit durch ein elliptisches Integral ausgedrückt; dieses wird algebraisch für $h = 2a$, nämlich

$$t = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \int \frac{dz}{(2a-z) \,.\, \sqrt{z}}; \tag{6}$$

der Punkt kommt in dem obersten Punkte des Kreises mit der Geschwindigkeit Null an, aber erst nach einer unendlich langen Zeit; denn in der Nähe der oberen Grenze kann man das genannte Integral ersetzen durch

$$\int \frac{dz}{(2a-z)\sqrt{2a}};$$

dieses Integral ist etwas zu klein und logarithmisch unendlich.

Nunmehr gehen wir zu dem allgemeinen Falle über und bestimmen den Druck auf die Kurve (die Spannung des Fadens). Rechnen wir den Radius positiv nach aufsen, so wird die Centripetalkraft gleich $-\frac{v^2}{a}$ und die Normalkraft gleich $g\frac{a-z}{a}$; dadurch erhält man für den Druck auf die Kurve

$$N = \frac{v^2 + g(a-z)}{a} = \frac{g}{a}(2h + a - 3z). \qquad (7)$$

Ist das Teilchen mit dem Kreismittelpunkt durch einen biegsamen Faden verbunden, so wird dasselbe, wenn die Spannung negativ wird, den Kreis verlassen und sich nach den Gesetzen der Wurfbewegung weiter bewegen.

Ist $h > 2a$, so setzt sich die Bewegung auf dem Kreise beständig in demselben Sinne fort, und zwar ist die Geschwindigkeit ein Minimum in dem höchsten, ein Maximum in dem niedrigsten Punkte des Kreises.

Ist $h < 2a$, so wird das Pendel hin- und herschwingen, und zwar ändert die Bewegung ihre Richtung für $z = h$. Unter Schwingungszeit versteht man dann diejenige Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von seiner einen gröfsten Höhe bis an die andere zu gelangen. Um diese Zeit, die besondere Bedeutung hat, zu bestimmen, wollen wir lieber Polarkoordinaten benutzen.

Es sei θ der Ausschlagswinkel, das heifst der Winkel, durch welchen das Pendel sich von der tiefsten Lage des Teilchens aus bewegt hat, und α sei der $v = 0$ entsprechenden Ausschlagswinkel; dann hat man

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

und

$$2g(h-z) = 2ga(\cos\theta - \cos\alpha),$$

so dafs das Princip der lebendigen Kraft ergiebt:

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}. \tag{8}$$

Wir können hier zunächst eine angenäherte Integration benutzen, die für den Fall gilt, wo der Ausschlag so klein ist, dafs man $\cos\alpha$ und $\cos\theta$ durch die beiden ersten Glieder der für dieselben geltenden Reihenentwicklungen ersetzen kann. Dadurch erhält man

$$t = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos\frac{\theta}{\alpha}, \tag{9}$$

wo die Konstante so bestimmt ist, dafs $t = 0$ für $\theta = 0$.

Setzt man $\theta = -\alpha$, so erhält man die gesuchte Schwingungszeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{10}$$

Hieraus ergiebt sich, dafs man für kleine Ausschläge die Schwingungszeit als unabhängig von der Gröfse des Ausschlages betrachten darf, ein Umstand, der für die Konstruktion von Pendeluhren von Wichtigkeit ist.

In dem allgemeinen Ausdruck (8) setzen wir $\theta = 2v$, $\alpha = 2\psi$ und erhalten dann

$$t = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{dv}{\sqrt{\sin^2\psi - \sin^2 v}},$$

oder, wenn wir $\sin v = \sin\psi \sin\varphi$, $\sin\psi = e$ setzen,

$$t = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}},$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}, \tag{11}$$

wo das Integral das vollständige erste elliptische Integral

ist. Für kleine Werthe von e bedient man sich der Reihenentwicklung; man hat nämlich

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} e^4 \sin^4 \varphi + \ldots.$$

und
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4.6..2m} \frac{\pi}{2},$$

wodurch

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 e^4 + \ldots\right]. \quad (12)$$

25. Bewegung auf der Cykloide. Wir nehmen an, die Cykloide liege in einer vertikalen Ebene mit der Konkavität nach oben und mit senkrechter Axe. Den Scheitelpunkt wählen wir zum Anfangspunkt und die z-Axe rechnen wir positiv nach oben. Dann ist die Differentialgleichung der Cykloide:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{z}{2a - z}}, \quad (13)$$

wo a den Radius des rollenden Kreises bedeutet. Für ein an die Kurve gebundenes Teilchen, auf welches die Schwere einwirkt, haben wir

$$v^2 = 2g(h - z),$$

worin h der Wert von z ist, welcher einer Geschwindigkeit Null entspricht. Nun ist

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = \frac{2a}{z} dz^2,$$

mithin

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a}{z} \frac{dz^2}{dt^2} = 2g(h - z),$$

woraus

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dz}{\sqrt{hz - z^2}}; \quad (14)$$

hier ist das obere Vorzeichen für die aufsteigende, das

untere für die absteigende Bewegung zu nehmen. Durch Integration erhalten wir als für beide Fälle gültig

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{2z - h}{h}, \tag{15}$$

wo die Konstante so bestimmt ist, dafs $t = 0$ für $z = h$. Für $z = 0$ erhalten wir die halbe Schwingungszeit

$$\tfrac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \tag{16}$$

welche unabhängig von h ist. Das Teilchen braucht also dieselbe Zeit zu einer Schwingung, einerlei von welcher Höhe der Fall beginnt. Die Cykloide heifst deshalb tautochron. Die Schwingungszeit ist dieselbe wie für ein Pendel von der Länge $4a$, welches kleine Ausschläge macht. Dies stimmt dazu, dafs der Krümmungsradius für den Scheitelpunkt der Cykloide gerade $4a$ ist, und der Krümmungskreis sehr nahe für eine kurze Strecke mit der Cykloide zusammenfällt.

26. Um zu untersuchen, ob es andere tautochrone Kurven als die Cykloide giebt, nehmen wir die Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)},$$

woraus

$$\tfrac{1}{2} T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\frac{ds}{dz}\,dz}{\sqrt{h-z}}; \tag{17}$$

hierin bedeutet $\frac{1}{2}T$ die Zeit, welche das Teilchen braucht, um von $z = h$, wo die Geschwindigkeit Null ist, bis $z = 0$ zu fallen. Setzen wir $s = \varphi(z)$, so können wir φ so bestimmen, dafs T konstant wird, oder allgemein so, dafs $\frac{1}{2}T$ eine gegebene Funktion von h wird. Um das zu erreichen multiplicieren wir mit

$$\frac{dh}{\sqrt{\mu - h}},$$

wo μ eine Konstante bedeutet, und integrieren von Null bis μ. Dadurch erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2g}\int_0^\mu \frac{Tdh}{\sqrt{\mu - h}} = \int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu - h}} \int_0^h \frac{\varphi'(z)\,dz}{\sqrt{h - z}}.$$

Setzen wir

$$z = h - y^2 \quad \text{und darauf} \quad h = \mu - x^2,$$

so verwandelt sich das Doppelintegral in

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}} dx \int_0^{\sqrt{\mu - x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\,dy;$$

setzen wir

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dxdy = rdrd\theta,$$

so wird hieraus

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(\mu - r^2)\,rdrd\theta = \pi[\varphi(\mu) - \varphi(0)].$$

Rechnen wir die Bogenlänge von $z = 0$ an, so haben wir $\varphi(0) = 0$ und, wenn wir z am Stelle von μ setzen,

$$s = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi}\int_0^z \frac{Tdh}{\sqrt{z - h}}. \tag{18}$$

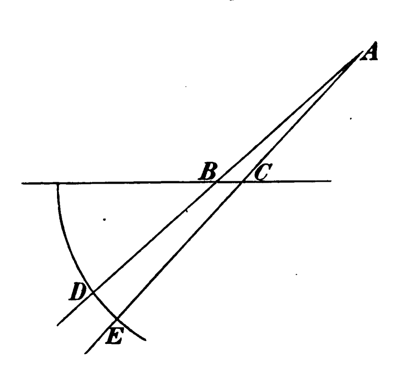
Ist T konstant, so erhalten wir, wenn k eine Konstante bedeutet,

$$s = k\sqrt{z};$$

dies ist eine Differentialgleichung der Cykloide, so dafs diese Kurve die einzige Tautochrone ist.

Die Cykloide ist die B r a c h i s t o c h r o n e, das heifst

diejenige Kurve, der ein Punkt folgen muſs, um in möglichst kurzer Zeit von einem gegebenen Punkte bis zu einem anderen zu fallen. Die Cykloide erhält eine horizontale Basis, die Konkavität ist nach oben gewendet, und die Spitze liegt im höchsten Punkte.



Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir erst folgende Aufgabe lösen: AB und AC bilden einen unendlich kleinen Winkel mit einander. Ein Teilchen fällt von der horizontalen Geraden BC an längs irgend einer Kurve; wie muſs dasselbe fallen, um zwischen die beiden Geraden AB und AC in der möglichst kurzen Zeit hindurch zu passieren?

Man sieht leicht, daſs der Weg des Teilchens die beiden Geraden orthogonal schneiden muſs. Der Weg zwischen den beiden Geraden sei DE; ist $AB = l$, $BD = m$, so wird DE in einer Zeit passiert, die, von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich ist

$$\frac{l+m}{\sqrt{m}},$$

und diese wird ein Minimum für $l = m$.

Nun wollen wir annehmen, daſs ein Teilchen von einem Punkte A nach einem tiefer liegenden Punkte B in der möglichst kurzen Zeit fallen soll. Wir betrachten es als einleuchtend, daſs der Fall in der durch A und B gelegten Vertikalebene vor sich gehen müsse. Durch die beiden Punkte legen wir eine Cykloide mit der Spitze in

A, mit horizontaler Basis und aufwärts gerichteter Konkavität; teilen wir diese Kurve durch ihre Normalen in unendlich kleine Teile und beachten wir, dafs der Krümmungsradius das Doppelte der Normale beträgt, so zeigt die oben gelöste Aufgabe, dafs jedes unendlich kleine Stück der Cykloide in kürzerer Zeit passiert wird, als das zwischen denselben beiden Normalen liegende Stück jeder anderen Kurve zwischen A und B. Dadurch ist denn der Satz bewiesen, oder richtiger der folgende allgemeinere Satz: Ein Teilchen, welches von einer gegebenen horizontalen Geraden an in einer Vertikalebene so fallen soll, dafs es zwischen zwei in der Ebene liegenden Geraden, deren Schnittpunkt oberhalb der horizontalen liegt, in der möglichst kurzen Zeit hindurchpassiert, mufs längs einer Cykloide fallen, die ihre Basis in der gegebenen horizontalen Geraden hat und normal zu den beiden anderen gegebenen Geraden ist.

Bewegung eines Teilchens, welches an eine Fläche gebunden ist.

27. N ist die Reaktion der Fläche und bildet mit den Axen die Winkel α, β und γ; dann hat man

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha\,; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta\,; \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ist N normal zur Fläche, so ist ihre Arbeit gleich Null, und das Princip der lebendigen Kraft ergiebt

$$\tfrac{1}{2}\,d\,.\,v^2 = Xdx + Ydy + Zdz\,, \qquad (2)$$

was sich auch aus den obenstehenden Gleichungen ableiten läfst, da

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0$$

ausdrückt, dafs N normal zur Fläche ist.

Wenn eine Kräftefunktion φ existiert, so erhält man durch Integration

$$v^2 - v_0^2 = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0), \tag{3}$$

wo v_0 die Geschwindigkeit im Punkte (x_0, y_0, z_0) bezeichnet. Die Niveaufläche wird dann durch

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.} \tag{4}$$

bestimmt.

Wenn keine äufseren Kräfte auf das Teilchen wirken, so bleibt die Geschwindigkeit konstant; da N die einzige wirkende Kraft ist, so mufs die oskulierende Ebene der Bahn überall normal zur Fläche sein; die Bahn wird also eine geodätische Kurve.

Ist in der allgemeinen Aufgabe die Bewegung bestimmt, so bestimmt man die Reaktion der Fläche durch die Gleichungen (1) oder dadurch, dafs die Centripetalkraft die Resultante ist von der Reaktion der Fläche und derjenigen Komponente der äufseren Kräfte, welche normal zur Bahn gerichtet ist.

28. Das konische Pendel. Wir wollen im besonderen die Bewegung auf einer Umdrehungsfläche um die z-Axe betrachten, wenn die Schwere die einzige äufsere Kraft ist. Rechnet man die z-Axe positiv nach oben, so hat man

$$v^2 = 2g(h - z), \tag{5}$$

und es entspricht $z = h$ einem $v = 0$. Projiciert man die Bewegung auf die xy-Ebene, so gehen die wirkenden Kräfte durch den Anfangspunkt, und man kann deshalb

die von der Centralbewegung her bekannte Gleichung

$$xdy - ydx = cdt \tag{6}$$

benutzen; nimmt man hierzu die Gleichung der Fläche:

$$x^2 + y^2 = 2\varphi(z), \tag{7}$$

so hat man die erforderliche Zahl von Gleichungen, um die Bewegung zu bestimmen; schreibt man die Gleichungen in der Form

$$dx^2 + dy^2 = 2g(h-z)\,dt^2 - dz^2,$$
$$xdy - ydx = cdt,$$
$$xdx + ydy = \varphi'(z)\,dz,$$

und quadriert und addiert die beiden letzten, so erhält man

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = c^2 dt^2 + \varphi'^2(z)\,dz^2;$$

setzt man hierin die Ausdrücke für x^2+y^2 und dx^2+dy^2 ein und bestimmt dt^2, so erhält man

$$dt^2 = \frac{2\varphi(z) + \varphi'^2(z)}{4g(h-z)\varphi(z) - c^2}\,dz^2. \tag{8}$$

Im besonderen wollen wir annehmen, daſs die Umdrehungsfläche eine Kugel sei mit dem Mittelpunkte im Anfangspunkt, ein Fall, der bei dem konischen Pendel stattfindet; dann ist

$$2\varphi(z) = a^2 - z^2; \quad \varphi'(z) = -z,$$

wodurch

$$dt = \frac{\pm\, adz}{\sqrt{2g(a^2-z^2)(h-z) - c^2}}; \tag{9}$$

das obere Zeichen ist für die aufsteigende, das untere für die absteigende Bewegung zu nehmen. Die Zeit wird also durch ein elliptisches Integral ausgedrückt.

Die Konstante c läſst sich bestimmen, wenn man die Geschwindigkeit für einen gewissen Punkt der Bahn kennt. Die Geschwindigkeit, welche Tangente der Kugel ist, möge v_0 sein; ist α_0 der Winkel, welchen sie mit der Normalen zu der durch das Teilchen gelegten verti-

kalen Diametralebene bildet, so ist $v_0 \cos \alpha_0$ die Komponente der Geschwindigkeit nach der Normale, also in der auf die xy-Ebene projicierten Bewegung die Komponente der Geschwindigkeit, welche senkrecht zum Radiusvektor gerichtet ist; nun wird diese Komponente durch $r\frac{d\psi}{dt}$ ausgedrückt, wenn ψ der Winkel des Radiusvektor mit einer festen Geraden in der xy-Ebene ist, und da

$$xdy - ydx = r^2 d\psi$$

ist, so wird

$$r\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

mithin

$$c = \sqrt{a^2 - z_0^2}\, v_0 \cos \alpha_0\,, \tag{10}$$

wo z_0 den der Lage des Teilchens entsprechenden Wert von z bedeutet. Man erhält also

$$c^2 = (a^2 - z_0^2) \,.\, 2g\,(h - z_0) \cos^2 \alpha_0\,.$$

Ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, also $c = 0$, so wird die Bewegung wie beim einfachen Pendel, denn die Geschwindigkeit des Teilchens liegt in der Vertikalebene, und das Teilchen mufs also fortfahren sich in dieser Ebene zu bewegen. Ist α_0 nicht gleich $\frac{\pi}{2}$, so können wir z_0 ein Maximum oder Minimum von z bezeichnen lassen. Dann mufs v_0 senkrecht auf der durch den Punkt gelegten Vertikalebene stehen, folglich $\alpha_0 = 0$ sein. Dann hat man

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(h - z) - (a^2 - z_0^2)(h - z_0)}}\,. \tag{11}$$

29. Um ein Maximum oder Minimum für z zu finden, setzen wir den Radikanden des Divisors gleich Null. Dadurch erhalten wir eine kubische Gleichung, deren eine Wurzel z_0 ist; die beiden anderen Wurzeln sind beide reell, wie sich leicht durch Division mittels

$z - z_0$ und Auflösung der entstehenden quadratischen Gleichung ergiebt. Von den drei Wurzeln mufs die eine gröfser als a sein, denn die linke Seite der Gleichung wird positiv für $z = \infty$ und, da $h > z_0$, negativ für $z = a$. Da dieser Wert von z keinen Punkten auf der Kugel entspricht, so müssen, da die Wurzelgröfse reell sein mufs, die beiden anderen Wurzeln Grenzwerte für z sein, so dafs das Teilchen beständig zwischen den beiden durch diese Werte bestimmten horizontalen Ebenen schwingt.

Die drei Wurzeln der Gleichung seien α, β, γ, und es sei $\gamma > \beta > \alpha$. Da der Koefficient von z gleich $-a^2$ ist, so hat man

$$\gamma\alpha + \gamma\beta + \alpha\beta = -a^2, \tag{12}$$

woraus hervorgeht, dafs wenigstens eine von den Wurzeln negativ sein mufs, so dafs die Bewegung nicht auf der oberen Halbkugel allein vor sich gehen kann. Nun führen wir einen neuen Winkel ein, indem wir

$$\frac{dz}{\sqrt{(\beta - z)(z - \alpha)}} = 2d\varphi \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\beta - z}{\beta - \alpha}}$$

setzen. Aus (12) folgt:

$$\gamma = -\frac{a^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}, \tag{13}$$

und da γ positiv ist und $\alpha\beta$ numerisch kleiner als a^2, so geht hieraus hervor, dafs $\alpha + \beta$ negativ sein mufs, so dafs die obere der beiden Grenzebenen dem Kugelmittelpunkt näher ist als die untere. Nun erhält man

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{\gamma - z}}, \tag{14}$$

und daraus ergiebt sich die Zeit für die Bewegung zwischen den beiden Ebenen, nämlich

$$T = \frac{2a}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma - z}}. \tag{15}$$

Aus dieser Formel erhält man einfache Grenzwerte für T, indem man für z beziehungsweise α oder β einsetzt.

Führt man die Werte für γ und z ein, so erhält man

$$T = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{16}$$

worin

$$A = a \sqrt{\frac{-2(\alpha + \beta)}{g(a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)}}; \quad e^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}. \tag{17}$$

Ist $\alpha = \beta$, so geht die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf der unteren Halbkugel vor sich.

30. Zur Berechnung des Winkels ψ haben wir

$$r^2 d\psi = (a^2 - z^2) d\psi = c dt, \tag{18}$$

mithin

$$d\psi = \frac{c dt}{a^2 - z^2} = \frac{c}{2a} dt \left(\frac{1}{a + z} + \frac{1}{a - z} \right); \tag{19}$$

setzt man hierin den Ausdruk für dt ein, so erhält man durch Integration für ψ eine Summe von zwei elliptischen Integralen der dritten Art.

Es läſst sich beweisen, das ψ um mehr als $\frac{\pi}{2}$ variiert, während das Teilchen von der einen Grenzebene zur anderen geht; man hat nämlich

$$c^2 = (a^2 - \beta^2) 2g (h - \beta),$$

aber

$$h - \beta = \alpha + \gamma = -\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha + \beta}$$

und

$$\gamma-\beta=-\frac{a^2+2a\beta+\beta^2}{a+\beta};\quad \gamma-a=-\frac{a^2+2a\beta+a^2}{a+\beta};$$

da z zwischen a und β liegt, so erhält man zwei Grenzwerte für $d\psi$, wenn man unter dem Wurzelzeichen für z beziehungsweise a und β setzt; dadurch erhält man

$$d\psi>\sqrt{\frac{(a^2-a^2)(a^2-\beta^2)}{a^2+2a\beta+a^2}}\left(\frac{d\varphi}{a+z}+\frac{d\varphi}{a-z}\right);$$

$$d\psi<\sqrt{\frac{(a^2-a^2)(a^2-\beta^2)}{a^2+2a\beta+\beta^2}}\left(\frac{d\varphi}{a+z}+\frac{d\varphi}{a-z}\right).$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a+z}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(a+\beta)\cos^2\varphi+(a+a)\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{(a+\beta)(a+a)}};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a-z}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(a-\beta)\cos^2\varphi+(a-a)\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{(a-\beta)(a-a)}},$$

wodurch

$$\psi>\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(a+\beta)(a+a)}+\sqrt{(a-\beta)(a-a)}}{\sqrt{a^2+2a\beta+a^2}};$$

$$\psi<\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(a+\beta)(a+a)}+\sqrt{(a-\beta)(a-a)}}{\sqrt{a^2+2a\beta+\beta^2}},$$

oder, wenn man die Brüche quadriert und nachher wieder die Quadratwurzel auszieht,

$$\psi>\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{a^2-a^2+2\sqrt{(a^2-a^2)(a^2-\beta^2)}}{a^2+2a\beta+a^2}};$$

$$\psi<\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{a^2-\beta^2+2\sqrt{(a^2-a^2)(a^2-\beta^2)}}{a^2+2a\beta+\beta^2}},$$

wo die Brüche im Radikanden positiv sind, so dafs $\psi>\frac{\pi}{2}$.

31. Die Reaktion der Fläche bestimmt man leicht mit Hülfe des in der Kinematik § 34 (S. 45) bewiesenen Satzes. Da der eine Endpunkt des Radius fest ist, so ist v die Geschwindigkeitsdifferenz; die Streckungsbeschleunigung besteht aus zwei Teilen, nämlich $-N$, herrührend von der Reaktion der Fläche, und $-\frac{gz}{a}$, herrührend von der Schwere. Man hat also

$$\frac{v^2}{a} = N + \frac{gz}{a}$$

oder

$$N = \frac{v^2 - gz}{a} = \frac{g}{a}(2h - 3z). \qquad (20)$$

Ist das Teilchen an den Mittelpunkt mittels eines Fadens von der Länge a befestigt, so ist N die Spannung dieses Fadens. Das Teilchen wird also, wenn es sich auf der unteren Halbkugel befindet, stets spannend auf den Faden wirken; auf der oberen Halbkugel dagegen kann N negativ werden, und dann wird das Teilchen sich nicht mehr auf der Kugelfläche bewegen, sondern diese verlassen und den Gesetzen der Wurfbewegung folgen.

32. Kleine Schwingungen. Entfernt das Teilchen sich nur wenig von dem tiefsten Punkt der Kugel, so wird die Spannung des Fadens sehr nahe gleich dem Gewicht des Teilchens sein, und man kann annäherungsweise $N = g$ setzen. Dadurch erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{a}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{y}{a};$$

diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die in 22, so dafs die Projektion der Bahn auf die xy-Ebene nicht viel von einer Ellipse abweicht. Durch Vergleichung

mit dem in 22 gefundenen Ausdruck ergiebt sich die Umlaufszeit als

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Anwendungen.

1. Beweise, dafs die Cykloide auch dann tautochron ist, wenn die Bewegung in einem Mittel vor sich geht, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist.

2. Ein Pendel beschreibt dadurch eine Cykloide (von einer Spitze bis zur anderen), dafs ein Faden um die Evolute der Cykloide gewickelt ist. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit des Fadens.

3. Ein schwerer Punkt fällt von einem gegebenen Punkte einer in einer Vertikalebene liegenden Kurve an und durchläuft einen beliebigen Bogen dieser Kurve in derselben Zeit, die er gebrauchen würde, um die zugehörige Sehne zu durchlaufen. Zeige, dafs die Kurve eine Lemniskate ist.

4. Welcher Kurve mufs ein schwerer Punkt folgen, um in gleichen Zeiten gleiche Höhen zu durchfallen?

5. Eine Kettenlinie mit vertikaler Symmetrieaxe wendet ihre Konkavität nach unten. Ein schwerer Punkt fällt vom höchsten Punkte an auf der äufseren Seite derselben hinunter. Wo verläfst der Punkt die Kurve?

6. Bestimme die Bewegung eines Teilchens, das an eine Gerade gebunden ist und von einem aufserhalb der Geraden liegenden Punkte nach dem Newtonschen Gesetz angezogen wird.

7. Bestimme die Bewegung eines schweren Punktes, der längs einer Schraubenlinie mit vertikaler Axe fällt.

8. Zwei schwere Punkte bewegen sich so auf derselben vertikalen Kreisperipherie, daſs sie denselben Punkt mit derselben Geschwindigkeit passieren. Bestimme die Enveloppe der Sehne, welche die beiden Punkte verbindet.

9. Ein Teilchen ist an eine Cykloide gebunden und bewegt sich auf derselben mit konstantem Druck; bestimme das Gesetz für die Gröſse der Kraft, wenn die Richtung derselben der Axe der Cykloide parallel ist.

10. Ein Teilchen ist an dem einen Ende eines dünnen Fadens befestigt, dessen anderes Ende um einen Kreiscylinder vom Radius a gewickelt ist; das Teilchen erhält eine Geschwindigkeit v, senkrecht zum Faden; dieser bewegt sich in einer Ebene, die senkrecht auf der Axe des Cylinders steht. Wenn das freie Ende des Fadens eine Länge l hat, nach wie langer Zeit ist der ganze Faden um den Cylinder gewickelt?

11. Ein schwerer Punkt durchläuft einen vertikalen Kreis, während er durch zwei gleich lange Fäden an zwei Punkte befestigt ist, die auf derselben horizontalen Geraden liegen. Durchschneidet man den einen Faden, während das Teilchen sich an seinem tiefsten Punkte befindet, so beschreibt dieses einen horizontalen Kreis; durchschneidet man den anderen Faden, wenn er horizontal ist, so beschreibt das Teilchen einen vertikalen Kreis, dessen Radius der andere Faden ist und hat gerade so viel Geschwindigkeit, um den obersten Punkt des Kreises zu erreichen; man bestimme die Winkel, welche die beiden Fäden mit der horizontalen Geraden bilden.

12. Ein schwerer Punkt fällt auf der Hypocykloide

$$(a-x)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Bestimme das Verhältnis zwischen der Zeit, welche erforderlich ist um den Bogen AM zu durchlaufen und derjenigen, die erforderlich ist um die Sehne AM zu durchlaufen, wenn A der Anfangspunkt und M ein beliebiger Kurvenpunkt ist. Im besonderen möge M der Punkt sein, dessen Koordinaten beide gleich a sind. Die y-Axe steht senkrecht.

13. In einer Vertikalebene sind ein Kreis und ein Punkt gegeben. Welcher geraden Linie mufs ein schwerer Punkt folgen, um in möglichst kurzer Zeit von dem gegebenen Punkt bis an die Kreisperipherie zu fallen?

14. Bestimme die Schwingungszeit für kleine Schwingungen eines schweren Punktes, der an eine Parabel mit vertikaler Axe gebunden ist.

15. Ein schweres Teilchen von der Masse m fällt auf der Kardioide

$$r = 2a(1 + \cos\theta),$$

die in einer Vertikalebene liegt und deren Polaraxe horizontal ist. Die Geschwindigkeit ist Null für $\theta = 0$. Man bestimme den Druck.

16. Ein schwerer Punkt ist an einen glatten Cylinder mit vertikaler Erzeugenden gebunden. Wie erscheint die Bahn des Punktes, wenn der Cylindermantel abgewickelt wird?

17. Ein schwerer Punkt ist an eine Umdrehungsfläche mit vertikaler Axe gebunden. Derselbe erhält an einem beliebigen Punkte eine gegebene horizontale Geschwindigkeit und bewegt sich dann auf dem Parallelkreise. Bestimme die Meridiankurve.

VIERTES KAPITEL.

Algemeine Grundsätze für die Bewegung zusammengesetzter Systeme.

D'Alemberts Princip.

33. Wir wollen ein System von materiellen Teilchen betrachten, das sich in Bewegung befindet. Die Teilchen können frei, oder auf beliebige Arten mit einander verbunden sein; sie können unter der Einwirkung äufserer Kräfte stehen, aber sie können zugleich durch Druck, Spannungen, gegenseitige Anziehung u. s. w. auf einander einwirken.

Ein beliebiges Teilchen des Systems möge die Masse m und die Koordinaten x, y, z haben. Diejenige Kraft, welche dem Teilchen, wenn es frei wäre, die wirklich stattfindende Bewegung erteilen würde, ist die Resultante aller sowohl äufseren wie inneren Kräfte (hierzu Spannungen, Druck u. s. w. gerechnet), welche auf das Teilchen wirken und hat die Komponenten

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2};$$

fügt man diese Kräfte (die Effektivkräfte) mit entgegengesetzten Vorzeichen zu denen hinzu, welche wirklich auf das Teilchen wirken, so erhält man ein System von im Gleichgewicht befindlichen Kräften.

Dies gilt in jedem Augenblik für alle Teilchen; betrachtet man aber das ganze System auf einmal, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn alle von den Verbindungen herrührenden inneren Kräfte entfernt werden, da diese, dem Princip .von Aktion und Reaktion zufolge, paarweise gleich grofs und entgegengesetzt sind. Bezeichnet man durch X, Y, Z die Summe der Komponenten der nicht von den Verbindungen herrührenden Kräfte, welche auf m wirken, so erhält die Resultante der aus den Verbindungen herrührenden Kräfte, welche auf m wirken, die Komponenten

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2};$$

diese Kraft und die analogen werden mit einer nicht ganz glücklich gewählten Bezeichnung die verlorenen Kräfte genannt. Nun läfst sich d'Alemberts Princip folgendermafsen ausdrücken:

Während der Bewegung eines beliebigen Systems halten die verlorenen Kräfte sich in jedem Augenblick durch die Verbindungen im Gleichgewicht.

Hierdurch ist das allgemeine dynamische Problem in ein statisches verwandelt; wir können also die in der Statik gefundenen Gleichgewichtsbedingungen benutzen, um aus dem allgemeinen Princip speciellere Principien von grofser Wichtigkeit zu entwickeln. Dazu benutzen wir im besonderen die sechs Gleichgewichtsbedingungen, die für Kräfte gelten, welche an einem Systeme von fest verbundenen Punkten angreifen, sowie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Wir ziehen es jedoch vor in beiden Fällen diejenigen Systeme von Kräften zum Ausgangspunkt zu nehmen, welche das Gleichgewicht

für jedes einzelne Teilchen herstellten. Für das Teilchen m war dies die Kraft mit den Komponenten

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

von denen jede für sich genommen Null ist, wenn wir mit X, Y, Z die Komponenten der ganzen auf m wirkenden Kraft bezeichnen.

Bewegung des Schwerpunktes.

34. Projiciert man alle genannten Systeme von im Gleichgewicht befindlichen Kräften auf eine beliebige Gerade, so kann man alle inneren Kräfte vernachlässigen, da diese, und deshalb auch ihre Projektionen, paarweise gleich grofs und entgegengesetzt sind. Wenn jetzt X, Y und Z nur die Komponenten der äufseren Kräfte bezeichnen, so erhält man, wenn die Summation auf alle Massenteilchen des Systems ausgedehnt wird,

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X; \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y; \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z. \quad (1)$$

Beachtet man nun, dafs $m\frac{dx}{dt}$ die Projektion der Bewegungsgröfse auf die x-Axe ist, so dafs $m\frac{d^2x}{dt^2}dt$ den Zuwachs darstellt, den diese Projektion in der Zeit dt erfährt, sowie dafs Xdt eben die Bewegungsgröfse ist, welche die Kraft X in der Zeit dt mitteilt, so sieht man, dafs die gefundenen Gleichungen, nachdem sie mit dt multipliciert sind, ausdrücken:

Der ganze geometrische Zuwachs an Bewegungsgröfse, welchen das System in einem Zeitelement erfährt, ist genau gleich der in diesem Zeitelement von den äufseren Kräften entwikkelten Bewegungsgröfse.

35. Diesem Satze kann man eine andere, besonders übersichtliche Form geben. Denken wir uns in einem beliebigen Augenblick alle Teilchen fest mit einander verbunden, so wird der Schwerpunkt des Systems, wenn die Gesamtmasse M ist, bestimmt durch die Gleichungen

$$Mx_1 = \Sigma mx; \quad My_1 = \Sigma my; \quad Mz_1 = \Sigma mz.$$

Differentiiert man diese Gleichungen zweimal mit Bezug auf die Zeit, so erhält man

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

und die analogen; dadurch verwandeln sich die Gleichungen (1) in

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X; \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y; \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z; \tag{3}$$

diese Gleichungen sind identisch mit denjenigen, welche die Bewegung des Schwerpunktes bestimmen würden, wenn man sich die Masse des ganzen Systems in diesem Punkte vereinigt, und alle äufseren Kräfte parallel mit sich bis an diesen verlegt dächte. Es ergiebt sich also:

Der Schwerpunkt eines Systems von Teilchen bewegt sich so, als ob er die Masse des ganzen Systems enthielte und als ob in ihm alle parallel mit sich verschobenen äufseren Kräfte angriffen.

Im besonderen folgt hieraus das sogenannte Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes:

Der Schwerpunkt eines Systems, auf welches nur innere Kräfte wirken, bewegt sich nach dem Gesetz der Beharrung.

Wenn auf das System nur äufsere Kräfte wirken, deren Projektionen auf irgend eine Gerade oder Ebene Null zur Summe haben, so ergiebt sich leicht, dafs die

Projektion des Schwerpunktes auf diese Gerade oder Ebene sich nach dem Gesetz der Beharrung bewegt.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir das entwickelte Princip auf einige Fälle anwenden.

1. Wenn ein Mann über einen Graben springt, so kann er, wenn vom Luftwiderstande abgesehen wird, von dem Augenblick an, wo er den Erdboden verlassen hat, die Bewegung seines Schwerpunktes nicht mehr beeinflussen. Dieser wird den Gesetzen der Wurfbewegung folgen, einerlei welche Bewegungen der Mann in der Luft ausführen mag.

2. Ein Mann, der auf einer vollkommen glatten Eisfläche steht, kann seinem Schwerpunkte nur Bewegungen in der Vertikalen erteilen und kann deshalb seinen Platz nicht verlassen. Auf der Erde macht der Reibungswiderstand es uns möglich die horizontale Kraft hervorzubringen, die uns vorwärts bewegt, während wir gleichzeitig den Erdboden etwas zurückdrücken, so daſs der Schwerpunkt für alle bewegten Teile in seiner Lage bleibt.

3. Wird eine Kanone abgeschossen, so erfährt dieselbe einen Rückstoſs, die Granate fliegt davon und explodiert; ihre Splitter fliegen nach allen Seiten, die Luft wird in Bewegung gesetzt u. s. w., aber der Schwerpunkt für alle bewegten Teile ändert seine Lage nicht. Daſs hierbei feste Körper in luftförmige übergehen, ändert nichts an der Gültigkeit des Satzes, denn auch hierbei treten nur innere, paarweise entgegengesetzte Kräfte auf.

Wir haben hier von der Schwere abgesehen; nehmen wir aber Rücksicht auf dieselbe und betrachten wir die Erde als fest, so sehen wir, daſs der Schwerpunkt in Wirklichkeit dem Gesetze für die Bewegung beim freien Fall folgt, jedoch mit einer geringeren Beschleunigung.

Diese mufs sich zu g verhalten wie die Masse des Geschosses zur Gesamtmasse, da die Wirkung der Schwere auf die Kanone durch die Reaktion der Unterlage aufgehoben wird.

4. Ein Mann sitzt hinten in einem Boot und hat ein Segel aufgespannt quer zum Boot; denken wir uns, dafs er Lungen besäfse, mit denen er einen Orkan hervorbringen könnte, so würde er durch Blasen auf das Segel nur dann das Boot vorwärts treiben, wenn er so stark bliese, dafs die Reaktion ihn selbst hinten aus dem Boot würfe. Will er sich vorwärts bewegen, so mufs er sich umdrehen und in die Luft hinaus blasen; da er hierdurch den Schwerpunkt der Luftmasse zurücktreibt, bewegt sich das Boot vorwärts.

5. Das Princip scheint der Erfahrung zu widerstreiten, dafs man, wenn man in einem leichten Wagen sitzt, diesen dadurch vorwärts bewegen kann, dafs man sich nach vorn wirft und mit einen plötzlichen Ruck innehält. Wir wollen deshalb genauer untersuchen, was hier vorgeht.

Um den Körper zu bewegen, müssen wir die Füsse gegen den Wagen stemmen; dadurch suchen wir den Wagen zurückzutreiben, und wenn der Reibungswiderstand verschwindend ist, wird der Wagen sich in Wirklichkeit so zurückbewegen, dafs der gemeinsame Schwerpunkt für den Wagen und die Person in seiner Lage bleibt. Ist der Reibungswiderstand dagegen hinreichend grofs, so wird der Wagen nicht zurückgehen, sondern auf Grund einer durch den Reibungswiderstand hervorgerufenen Spannung die Unterlage etwas zurücktreiben; dies mufs also mitberücksichtigt werden, wenn das Princip angewandt werden soll. Nun hält die

Bewegung der Person inne durch einen Stofs gegen den Wagen; dieser empfängt dadurch plötzlich den gröfsten Teil der Bewegungsgröfse, welche die Person nach und nach durch ihre Bewegung nach vorn entwickelt hat. Die dadurch auf den Wagen wirkende Kraft ist stark genug, um im Verein mit der Spannung der Unterlage, die wie eine zurückschlagende Feder wirkt, den Reibungswiderstand zu überwinden, und der Wagen bewegt sich vorwärts. Die Unterlage bewegt sich jedoch nicht mit: dadurch dafs diese zurückgetrieben wurde, ist der Wagen vorwärts gekommen; der gemeinsame Schwerpunkt hat seine Lage nicht verändert.

Das Princip der Flächen.

36. Wir kehren nun zurück zu den an den Teilchen des Systemes angebrachten, im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystemen, um auszudrücken, dafs die Momentensumme der vereinigten Systeme mit Bezug auf eine beliebige Gerade Null ist. Auch hier können wir alle inneren Kräfte vernachlässigen, da zwei gleich grofse und entgegengesetzte, in derselben Geraden wirkende Kräfte gleich grofse und entgegengesetzte Momente mit Bezug auf eine beliebige Gerade haben.

Wir erhalten also, wenn X, Y und Z wiederum nur die Komponenten der äufseren Kräfte bezeichnen, und wenn wir die Momentensummen mit Bezug auf die Axen nehmen,

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma(yZ-zY),\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma(zX-xZ),\\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma(xY-yX). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nach Multiplikation mit dt drücken diese Gleichungen aus:

Der Zuwachs, welchen die Momentensumme der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf eine beliebige Gerade in der Zeit dt erfährt, ist gleich der in derselben Zeit von den äufseren Kräften entwickelten Momentensumme.

Wir haben früher die Bezeichnungen «geometrische» und «statische» Summe ohne Unterschied gebraucht; indessen kann es zweckmäfsig sein zwischen den beiden zu unterscheiden; wir wollen also unter der geometrischen Summe eines Systems von Kräften die Resultante der an denselben Punkt verlegten Kräfte verstehen, unter der statischen Summe aber diese Resultante in Verbindung mit dem bei der Verlegung hinzugekommenen Kräftepaar. Der obenstehende Satz zeigt dann in Verbindung mit dem Satze in 34, wenn die Bewegungsgröfsen als Kräfte aufgefafst werden:

Der Zuwachs, welchen die statische Summe der Bewegungsgröfsen im Zeitelement erfährt, ist genau gleich der statischen Summe der von den äufseren Kräften im Zeitelemente entwickelten Bewegungsgröfsen.

In dem besonderen Falle, wo keine äufseren Kräfte wirken, haben wir hier das Princip von der Erhaltung der statischen Summe der Bewegungsgröfsen; dies bringt natürlich mit sich, dafs die dem Systeme von Bewegungsgröfsen entsprechende Centralaxe (Statik, 53) nicht verändert wird.

37. Nun wollen wir im besonderen den Fall betrachten, wo entweder keine äufseren Kräfte wirken, oder

alle äufseren Kräfte gegen denselben Punkt gerichtet sind; diesen denken wir uns dann zum Anfangspunkt genommen, so dafs wir nur die Momentensummen mit Bezug auf die durch diesen Punkt gehenden Axen betrachten. Die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens fallen dann fort, und dadurch gelingt es uns, den Satz in einer besonders einfachen Form auszudrücken.

Die drei Gleichungen

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0; \quad \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0;$$
$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 \tag{5}$$

lassen sich nach Multiplikation mit dt sofort integrieren und ergeben dann:

$$\Sigma m\,(ydz - zdy) = c_1\,dt; \quad \Sigma m\,(zdx - xdz) = c_2\,dt;$$
$$\Sigma m\,(xdy - ydx) = c_3\,dt. \tag{6}$$

Beachten wir hier, dafs die Gröfsen in den Klammern das Doppelte der Flächenelemente sind, welche die Projektionen des Radiusvektor auf die Koordinatenebenen beschreiben, so können wir den Satz auf zwei Arten ausdrücken. Entweder:

Gehen alle auf ein System wirkenden äufseren Kräfte durch denselben Punkt, so ist die Summe der Momente der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf jede durch diesen Punkt gehende Gerade während der ganzen Bewegung konstant.

Oder in einer anderen Form:

Wenn man die Flächen, welche die vom Punkte an alle Teilchen gezogenen Radienvektoren beschreiben, auf eine beliebige Ebene projiciert und einzeln mit der Masse des be-

treffenden Teilchens multipliciert, so ist die erhaltene Summe der angewandten Zeit proportional.

Bezeichnet man die Summen, welche durch Projektion auf die Koordinatenebenen entstehen, mit F_x, F_y und F_z, so hat man, wenn die Flächen von der Lage aus, welche das System für $t=0$ einnimmt, gemessen werden,

$$F_x = \tfrac{1}{2}c_1 t; \quad F_y = \tfrac{1}{2}c_2 t; \quad F_z = \tfrac{1}{2}c_3 t. \qquad (7)$$

Projiciert man auf ähnliche Weise auf eine beliebige Ebene, deren Normale mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, so erhält man für die Projektion F:

$$2dF = (c_1 \cos\alpha + c_2 \cos\beta + c_3 \cos\gamma)\, dt,$$

woraus

$$F = \tfrac{1}{2}(c_1 \cos\alpha + c_2 \cos\beta + c_3 \cos\gamma)\, t. \qquad (8)$$

Bestimmt man eine durch den Anfangspunkt gehende Ebene derartig, dafs die Richtungscosinus ihrer Normale proportional zu c_1, c_2 und c_3 sind, und nennt man die entsprechenden Winkel α_1, β_1, γ_1, so hat man

$$F = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1)\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\,.\,t;$$

da die Gröfse in der Klammer den Cosinus des Winkels der beiden Ebenen ausdrückt, so erreicht dieselbe ihren Maximalwert 1, wenn die beiden Ebenen zusammenfallen. Die Ebene, welche die Gleichung

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \qquad (9)$$

hat, besitzt also die Eigenschaft, dafs die obengenannte Summe bei der Projektion auf diese Ebene ihren möglichst grofsen Wert erhält. Da die Gleichung die Zeit nicht enthält, so ist die Ebene fest; sie heifst die invariable Ebene. Eine solche mufs es z. B. für unser Planetensystem geben, und diese mufs sich benutzen lassen um alte Beobachtungen zu kontrolieren.

Hätten wir die erste Form des Satzes benutzt, so wären wir auf ähnliche Weise zu dem Resultat gekommen, dafs die auf der invariablen Ebene in dem festen Punkte errichtete Normale von allen durch diesen Punkt gehenden Geraden diejenige sei, für welche die konstante Momentensumme der Bewegungsgröfsen ein Maximum ist. Dieses Maximum bestimmt nach Gröfse und Richtung das resultierende Kräftepaar, welches wir erhalten, wenn wir die Bewegungsgröfsen als Kräfte behandeln und alle an den festen Punkt verlegen; der Satz kann deshalb auch das Princip der Erhaltung des resultierenden Kräftepaares genannt werden.

Nun wollen wir einige Anwendungen betrachten, die namentlich zur Erläuterung des Princips von der Erhaltung des Kräftepaares dienen mögen.

1. Wir sahen, dafs ein Mann, der auf einer vollkommen glatten Ebene steht, seinen Schwerpunkt nicht aus der Senkrechten herausbringen kann. Es ergiebt sich nun leicht, dafs er auch nicht imstande ist, sich um die Senkrechte zu drehen; er kann wohl z. B. den Kopf drehen, aber dann dreht sich der Körper im entgegengesetzten Sinne, denn die Momentensumme mit Bezug auf die Senkrechte mufs dauernd Null sein. Wenn wir auf dem Erdboden stehend den Oberkörper drehen können, so geschieht das, weil wir wegen des Reibungswiderstandes die Unterlage nach der entgegengesetzten Seite drehen.

2. Könnte ein Heer, welches beständig am Äquator um die Erde herummarschierte, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde verändern? Man sieht leicht, dafs die Antwort verneinend ausfallen mufs. Solange das Heer marschiert, ist die Umdrehungsgeschwindigkeit verändert

(wenn wir das Heer nicht mit zur Erde rechnen); sobald es aber Halt macht, tritt die alte Umdrehungsgeschwindigkeit wieder ein. Wird das Moment der Bewegungsgröfse des Heeres mit Bezug auf die Erdaxe mit berücksichtigt, so wird die Momentensumme in keinem Augenblick verändert.

3. Wenn ein Gymnastiker abspringt, um einen Salto mortale auszuführen, so verläfst er erst mit den Füfsen den Erdboden, wenn sein Schwerpunkt sich etwas vor seinen Füfsen befindet. Dadurch erteilt er seinem Körper eine Rotation, und die Winkelgeschwindigkeit dieser vergrösfert er dadurch, dafs er seinen Körper stark zusammenzieht. Wenn nämlich die Massenteilchen der Rotationsaxe näher gebracht werden, so müssen die Geschwindigkeiten vergröfsert werden, damit die Momentensumme unverändert bleibt.

4. Eine Person, welche schaukelt, vermehrt ihre Geschwindigkeit, wenn sie sich bei der absteigenden Bewegung von der Umdrehungsaxe entfernt, bei der aufsteigenden sich derselben nähert. Die Schwere vermehrt dadurch nämlich das Moment mit Bezug auf die Axe mehr bei der absteigenden Bewegung, als sie dasselbe bei der aufsteigenden Bewegung vermindert.

5. Wenn ein Seiltänzer im Begriff ist nach der einen Seite zu fallen, so bringt er eine entgegengesetzte Rotation durch eine Drehung der Balancierstange hervor. Der Grund dafür, dafs er dies kann, liegt in dem Reibungswiderstande des Seiles; wäre das Seil glatt, so würde eine Drehung der Stange seine Füfse von demselben entfernen.

6. Die Schwere vermag nicht die Rotation eines Körpers um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe

zu verändern. Die von der Schwere herrührende Momentensumme ist nämlich das Moment von dem im Schwerpunkte angebracht gedachten Gewicht des Körpers.

Instantane Kräfte oder Stofskräfte.

38. Wir haben gesehen, dafs der statische Zuwachs der Bewegungsgröfse eines Körpers von den äufseren Kräften herrührt, die auf den Körper gewirkt haben. In der Regel sind diese Kräfte so beschaffen, dafs sie einer merkbaren Zeit bedürfen, um eine merkbare Veränderung der Bewegungsgröfse hervorzubringen. Häufig trifft man indessen auf Kräfte, die nur während einer sehr kurzen Zeit wirken, die aber so grofs sind, dafs sie in dieser kurzen Zeit dem Körper eine merkbare Bewegungsgröfse mitteilen können. Solche Kräfte nennt man instantane Kräfte oder Stofskräfte.

Natürlich geht in Wirklichkeit eine Stofswirkung in einer endlichen Zeit vor sich, aber diese Zeit ist so klein, dafs wir sie vernachlässigen können, um so mehr als wir in der Regel nicht wissen, wie die Kraft in dieser kurzen Zeit gewirkt hat; wir wissen nur, dafs der gestofsene Körper plötzlich eine gewisse Bewegungsgröfse empfangen hat, und eben diese Bewegungsgröfse benutzen wir dann als Mafs für die Stofskraft.

Um dies analytisch auszudrücken, wollen wir annehmen, dafs die grofse Kraft die Komponenten X, Y, Z habe und von $t = 0$ bis $t = \theta$ wirke, wo θ sehr klein ist; in der unendlich kleinen Zeit dt teilt diese Kraft dem Körper eine Bewegungsgröfse mit, deren Komponenten

$$Xdt, \quad Ydt, \quad Zdt$$

sind, so dafs die in der Zeit θ mitgeteilte Bewegungsgröfse die Komponenten

$$\int_0^\theta X dt, \quad \int_0^\theta Y dt, \quad \int_0^\theta Z dt$$

hat; diese Gröfsen nennen wir die Komponenten der Stofskraft. X, Y und Z selbst kennen wir nicht; wir können uns wohl vorstellen, dafs sie im Verlauf der kurzen Zeit, welche der Stofs währt, anfänglich stark wachsen und darauf stark abnehmen müssen; aber die nähere Bestimmung ihrer Gröfse mufs von den Veränderungen abhängen, welche während der Dauer des Stofses im Inneren der zusammenstofsenden Körper stattfinden, ist also abhängig von dem physischen Zustande des Körpers. Das einzige, was wir über diese Kräfte im allgemeinen sagen können, ist das, dafs Aktion und Reaktion beständig gleich grofs und entgegengesetzt sein müssen, so dafs das allgemeine Princip der Erhaltung der Bewegungsgröfsen auch hier gelten mufs, wenn wir den stofsenden und den gestofsenen Körper zusammen betrachten. Hierdurch also, und nicht durch Ausführung der Integrationen, müssen wir die obenstehenden Integrale zu bestimmen suchen.

Obgleich also in Wirklichkeit die Veränderung der Bewegungsgröfse kontinuierlich in der Zeit θ vor sich geht, pflegt man dennoch, da θ in der Regel ein sehr kleiner Bruchteil einer Sekunde ist, die Veränderung als plötzlich vorgegangen zu betrachten; daraus folgt, dafs man während der Dauer des Stofses die Körper als unbeweglich, die Koordinaten also als konstant betrachten mufs, und dafs man folglich von der möglichen gleichzeitigen Wirkung von Kräften, die nicht Stofskräfte sind,

abzusehen hat, da diese in der verschwindenden Zeit nur eine verschwindende Bewegungsgröfse mitteilen können.

Später kommen wir wieder auf den Stofs zurück; ein Beispiel wollen wir jedoch schon hier anführen. Zwei Teilchen mit den Massen m und m_1 mögen in einem Punkte A zusammenstofsen, und AB und AC seien die Bewegungsgröfsen im Augenblicke des Zusammenstofses. Wir nehmen an, dafs die Teilchen sich nach dem Stofse vereinigt weiter bewegen (wie zwei weiche Thonkugeln). Die vereinigten Teilchen werden dann nach dem Stofse ihre Bewegung mit einer Bewegungsgröfse AD fortsetzen, welche die Resultante von AB und AC ist. Dadurch ist, weil die Masse $m + m_1$ beträgt, sowohl Richtung wie Geschwindigkeit bestimmt. Die Bewegungsgröfse welche m durch den Stofs vom m_1 empfangen hat, beträgt, wenn $+$ und $-$ geometrische Addition und Subtraktion bedeuten,

$$\frac{m}{m+m_1} AD - AB = \frac{m}{m+m_1}(AB + AC) - AB$$
$$= \frac{m AC - m_1 AB}{m + m_1}.$$

Dies Resultat giebt uns Veranlassung auf einen wesentlichen Unterschied zwischen allgemeinen Kräften und denjenigen, welche wir Stofskräfte genannt haben, aufmerksam zu machen. Die ersteren sind im allgemeinen den Massen, auf die sie wirken, proportional, und unabhängig von der Verbindung eines angegriffenen Massenteilchens mit anderen Massenteilchen. Das gilt aber nicht für Stofskräfte. Eine Masse m mit der Geschwindigkeit v kann Sitz eine Stofskraft von der Gröfse mv sein; das kann sie aber nur sein, wenn der Stofs unter solchen Umständen vor sich geht, dafs die stofsende

Masse ihre ganze Bewegungsgröfse abgiebt, nach dem Stofse also in Ruhe ist; sie kann sogar wie eine Stofskraft wirken, die gröfser als mv ist, da sie nach dem Stofse zurückspringen kann. Wir können nicht einmal sagen, dafs der Stofs proportional der stofsenden Masse sei; das ergiebt sich leicht aus dem oben gefundenen Ausdruck für die beim Stofse abgegebene Bewegungsgröfse, der genau Gröfse und Richtung des Stofses angiebt, den m von m_1 empfangen hat, während derselbe Ausdruck mit entgegengesetztem Vorzeichen den Stofs angiebt, den m_1 von m empfangen hat.

Bei den obenstehenden Betrachtungen haben wir uns im besonderen die Stofskräfte als einzelne Kräfte gedacht; indessen steht der Annahme nichts im Wege, dafs der Bewegungszustand eines Körpers sich plötzlich so verändern kann, dafs die Zunahmen der Bewegungsgröfsen keine einzelne Resultante haben.

Lebendige Kraft und Arbeit.

39. Indem wir nun dazu übergehen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden, wollen wir zunächst die auf die einzelnen Teilchen wirkenden Systeme von Kräften als im Gleichgewicht befindlich betrachten; die Summe der virtuellen Momente wird dann für alle Verschiebungen gleich Null sein; jedoch beschränken wir uns darauf solche Verschiebungen vorzunehmen, welche zu den gegebenen Bedingungen stimmen; dann können wir nämlich die Kräfte aufser Acht lassen, welche bei diesen Verschiebungen keine Arbeit ausführen; hierzu gehören die äufseren Kräfte, welche von der normalen Reaktion fester Flächen oder

Kurven herrühren, und solche inneren Kräfte, welche paarweise gleich grofs und entgegengesetzt sind und auf Teilchen wirken, deren Abstände sich nicht verändern. Haben wir dagegen solche inneren Kräfte, die zwar als Aktion und Reaktion auftreten, aber paarweise Angriffspunkte mit veränderlichem Abstande besitzen (gegenseitige Anziehung zwischen zwei Teilchen, Spannung elastischer Fäden u. s. w.), so wissen wir von der Statik her, dafs ein solches Paar, dessen Angriffspunkte den Abstand l haben, zusammen ein virtuelles Moment erhalten (eine Arbeit ausführen), welches gleich

$$T\delta l$$

ist, worin T die Gröfse der Anziehung oder Spannung bedeutet, positiv oder negativ gerechnet, jenachdem die entgegengesetzten Kräfte die Entfernung l zu vergröfsern oder zu verkleinern bestrebt sind.

Wir haben also, wenn die Summation auf alle Massenteilchen ausgedehnt wird,

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0. \quad (10)$$

Es ist hier wohl zu beachten, dafs diese Gleichung in jedem Augenblick während der Bewegung gilt; dies ist so zu verstehen, dafs, wenn wir uns in einem beliebigen Augenblick die Bewegung eingestellt denken und die genannten Kräfte in diesem Augenblick betrachten, Gleichgewicht stattfindet. Die Verschiebungen sind also solche, welche in dem Augenblick, wo die Bewegung aufhört, zu den gegebenen Bedingungen, so wie sie jetzt sind, stimmen. Dies hat namentlich in dem Falle Bedeutung, wo die Zeit explicit in den Bedingungsgleichungen vorkommt. In diesen erhält also t in dem betrachteten Augenblick einen gewissen

konstanten Wert, und dieser verändert sich nicht, wenn wir den Teilchen ihre virtuellen Verschiebungen erteilen; da das Verhältnis dieser durch Differentiation der Bedingungsgleichungen bestimmt wird, so ist t bei dieser Differentiation als konstant zu betrachten.

Beispielsweise wollen wir ein Teilchen betrachten, auf das keine äußeren Kräfte wirken, das aber an eine Gerade gebunden ist, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der xy-Ebene um den Anfangspunkt dreht, Sind x und y die Koordinaten des Teilchens, so haben wir

$$y = x \operatorname{tg} kt,$$

vo k eine Konstante bedeutet. Da $X = Y = 0$, so ist ferner

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y = 0;$$

nun ergiebt die Bedingungsgleichung

$$\delta y = \delta x \,.\, \operatorname{tg} kt;$$

dadurch wird die vorhergehende Gleichung verwandelt in

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{tg} kt = 0.$$

Für die Bewegung in der wirklichen Bahn erhalten wir indessen, wenn wir die Bedingungsgleichung zweimal differentiieren, wobei t variiert,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{tg} kt + 2k\frac{dx}{dt}\frac{1}{\cos^2 kt} + 2k^2 x\frac{\sin kt}{\cos^3 kt}.$$

Wird dieser Wert oben eingesetzt, so haben wir eine Differentialgleichung zwischen x und t.

Hieran sehen wir den Unterschied zwischen den beiden Differentiationen; bei der ersten denken wir uns die Bewegung eingestellt, indem wir t einen konstanten Wert beilegen; die virtuelle Verschiebung des Teilchens

kann dann nur in der für den Augenblick festen Linie, an welche es gebunden ist, vor sich gehen. Bei der zweiten Differentiation betrachten wir dagegen die wirkliche Bahn des Teilchens und die Zunahmen dx und dy in dieser. Wir sehen also, dafs die wirklichen Verschiebungen nicht mit zu den virtuellen möglichen gehören, wenn die Bedingungsgleichungen die Zeit explicit enthalten. Ist im allgemeinen die Bedingungsgleichung

$$L = 0,$$

so erhalten wir in den beiden Fällen beziehungsweise

$$\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots = 0$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy + \frac{\partial L}{\partial z}dz + \frac{\partial L}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial t}dt = 0;$$

daraus geht hervor, dafs die durch δ und d bezeichneten Variationen nur dann dieselben sein können, wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist, wodurch ausgedrückt wird, dafs die Zeit nicht explicit in den Gleichungen enthalten ist.

40. Aus den Gleichungen (10) können wir Integrale abzuleiten versuchen, indem wir im besonderen solche δx, δy ... wählen, welche irgend einer möglichen Verschiebung entsprechen. Besonderes Interesse hat hier der Fall, wo t nicht explicit in den Bedingungsgleichungen vorkommt; wir können dann als virtuelle Verschiebung die kleine Verschiebung der Teilchen in ihren wirklichen Bahnen nehmen, welche in der Zeit dt vor sich gehen, also

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz \ldots\ldots$$

setzen; dadurch erhalten wir

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (11)$$

Hier ist die Gröfse auf der linken Seite das Differential der lebendigen Kraft des ganzen Systems, während die Gröfse auf der rechten Seite die Elementararbeit darstellt. Durch Integration finden wir dann:

Der Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen das bewegte System erfährt, wenn es aus einer Lage in eine andere übergeht, ist gleich der von den wirkenden Kräften gleichzeitig ausgeführten Arbeit.

Eigentlich kann man auch sagen, dafs das Princip gilt, wenn die Zeit in den Bedingungsgleichungen vorkommt; die Veränderung dieser mit der Zeit wirkt dann aber wie eine Kraft; da diese unbekannt ist, mufs man solche Verschiebungen vornehmen, dafs sie verschwindet. Man vergleiche das Beispiel oben, wo die Verschiebung senkrecht zu der unbekannten Reaktion der beweglichen Geraden gerichtet ist.

41. Die Elementararbeit läfst sich in zwei Teile zerlegen, nämlich in den, der von den äufseren, und in den, der von den inneren Kräften herrührt. Dem letzteren kann man eine einfache Form geben; es möge nämlich φ eine innere Kraft sein, welche bei der Einwirkung von zwei Teilchen A und B auf einander entsteht; diese Einwirkung kann von Spannung, Druck, Anziehung, Abstofsung u. s. w. herrühren. Wir nehmen nur an, dafs φ die Richtung AB oder BA hat, je nachdem wir die auf das eine oder auf das andere Teilchen wirkenden Kräfte betrachten. Dann haben wir gesehen, dafs die bei einer kleinen Bewegung des Systems von den beiden gleichen und entgegengesetzten Kräften φ ausgeführte Arbeit gleich ist (Statik, 100)

$$\varphi dr,$$

wo r die Länge von AB bedeutet und φ positiv oder negativ, wie oben (39) angegeben, gerechnet wird. Die innere Arbeit besteht also aus einer Summe von Gliedern von dieser Form, und zwar erhält man ein Glied für jedes Paar von gleichen und entgegengesetzten Kräften, welche auf Teilchen mit variablem Abstande wirken.

Wir wollen annehmen, dafs die Kräfte φ Funktionen der entsprechenden Abstände r sind. Die Glieder

$$\Sigma\varphi dr$$

bilden dann das vollständige Differential einer gewissen Funktion I, welche ausschliefslich von den gegenseitigen Entfernungen der verschiedenen Massenteilchen abhängt.

Ist die von den äufseren Kräften herrührende Elementararbeit gleichfalls ein vollständiges Differential, so wird die ganze rechte Seite der Gleichung (11) ein vollständiges Differential; bezeichnen wir die entsprechende Funktion mit entgegengesetztem Vorzeichen durch $\overline{U}$, die lebendige Kraft des Systemes durch T, so erhalten wir aus (11) durch Integration

$$T+\overline{U} = E,$$

wo E eine Konstante bedeutet, der wir auf Grund unserer Bestimmung von $\overline{U}$ einen beliebigen Wert beilegen können; wir denken uns diesen so grofs gewählt, dafs er gröfser ist als der gröfste Wert, den die positive Gröfse T während der Bewegung annehmen kann. $\overline{U}$ bleibt dann auch positiv während der ganzen Bewegung.

E heifst die Energie, und diese besteht, wie die Gleichung zeigt, aus zwei Teilen: $\overline{U}$, der potentiellen Energie, und T, der lebendigen Kraft oder aktuellen Energie. Während der Bewegung verändern sich die

beiden Teile, aber ihre Summe bleibt unverändert. Hierin besteht das Princip der Erhaltung der Energie.

Wir haben die Kräfte in innere und äufsere geteilt, weil dies oft bequemer ist; in der Wirklichkeit lassen sich alle Kräfte als innere auffassen, da die Kräfte, welche auf gewisse Massenteilchen wirken, immer von anderen Massenteilchen ausgehen, und nimmt man diese als zum Systeme gehörig, so werden alle Kräfte innere.

Die lebendige Kraft des Systemes besteht auch aus zwei Teilen, nämlich dem Teile, den wir unmittelbar wahrnehmen können, und einem Teile, welcher von sehr kleinen schwingenden Bewegungen der Moleküle und Atome des Körpers herrührt; den ersten Teil wollen wir im Folgenden besonders als lebendige Kraft bezeichnen; der zweite Teil, der mittelbar als Wärme wahrgenommen wird, wird in der Physik besonders behandelt, während wir denselben hier nur gelegentlich erwähnen werden.

Wie oben angeführt spielt die potentielle Energie die Rolle, dafs sie bei der Bewegung der Massenteilchen in aktuelle Energie übergeht und umgekehrt. Betrachten wir z. B. einen Stein, auf den die Schwere wirkt und der sich in Ruhe befindet, so ist die lebendige Kraft gleich Null, während potentielle Energie vorhanden ist, die um so gröfser ist, in je gröfserer Entfernung von der Erde sich der Stein befindet. Läfst man den Stein fallen, so vermindert sich allmählich die potentielle Energie, indem sich die Entfernung vermindert, aber gleichzeitig wächst die Geschwindigkeit des Steines und dadurch die lebendige Kraft.

42. Die beiden Teile der lebendigen Kraft. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Systemes seien ξ,

η, ζ, und es seien x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Massenteilchens mit Bezug auf ein bewegliches Koordinatensystem, das den Schwerpunkt zum Anfangspunkt hat und dessen Axen denen des festen Systems parallel sind; dann ist

$$x = x_1 + \xi; \quad y = y_1 + \eta; \quad z = z_1 + \zeta,$$

woraus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{d\zeta}{dt};$$

nun hat man für die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] dm,$$

oder wenn man die oben gefundenen Ausdrücke einsetzt,

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2}\Sigma\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] dm \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] dm \\ & + \Sigma\left[\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right] dm. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\Sigma x_1 dm = 0; \quad \Sigma y_1 dm = 0; \quad \Sigma z_1 dm = 0,$$

mithin

$$\Sigma\frac{dx_1}{dt} dm = 0; \quad \Sigma\frac{dy_1}{dt} dm = 0; \quad \Sigma\frac{dz_1}{dt} dm = 0;$$

folglich wird der letzte Teil von T gleich Null, da man ihn auf die Form

$$\frac{d\xi}{dt}\Sigma\frac{dx_1}{dt} dm + \frac{d\eta}{dt}\Sigma\frac{dy_1}{dt} dm + \frac{d\zeta}{dt}\Sigma\frac{dz_1}{dt} dm$$

bringen kann. Dem zweiten Teile von T kann man die Form

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\Sigma dm = \tfrac{1}{2} Mu^2$$

geben, wo M die ganze Masse, u die Geschwindigkeit

des Schwerpunktes bedeutet; dieser Ausdruck stellt also die lebendige Kraft dar, welche das System besitzen würde, wenn dessen Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre. Der erste Teil von T bezeichnet die lebendige Kraft des Systems mit Bezug auf den Schwerpunkt, das heifst die lebendige Kraft, welche es scheinbar für einen Beobachter haben würde, der sich im Schwerpunkte befände und sich mit diesem ohne Drehung bewegte.

Bezeichnet man die relative Geschwindigkeit mit v_1, so hat man für die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} Mu^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma v_1{}^2 dm; \qquad (12)$$

folglich:

Die ganze lebendige Kraft eines bewegten Systemes ist gleich der Summe aus der lebendigen Kraft der Gesamtmasse des Systemes, diese im Schwerpunkte vereinigt gedacht, und aus der relativen lebendigen Kraft mit Bezug auf den Schwerpunkt.

43. Die Elementararbeit läfst sich gleichfalls, wenn man die Koordinaten des Schwerpunktes einführt, in zwei Teile zerlegen, nämlich in

$$d\xi\Sigma X + d\eta\Sigma Y + d\zeta\Sigma Z$$

und in

$$\Sigma(Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1).$$

Der erste Teil stellt die Elementararbeit aller Kräfte dar, wenn man sich diese parallel mit sich bis zum Schwerpunkte verschoben denkt, und ist deshalb nach dem Satze über die Bewegung des Schwerpunktes gleich $\frac{1}{2}d.Mu^2$; man hat also

$$\Sigma \tfrac{1}{2}\, d\,.\, mv_1{}^2 = \Sigma(Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1), \qquad (13)$$

woraus hervorgeht, dafs das Princip der lebendigen Kraft auch für die relative Bewegung mit Bezug auf den Schwerpunkt gilt.

Das Princip von Gauss *).

44. Wir denken uns ein System von Massenteilchen, die unter einander auf beliebige Weise verbunden sind und auf welche beliebige Kräfte wirken. Zur Zeit t befindet das Massenteilchen m sich in einem Punkte A, während es, wenn die Verbindungen im letzten Zeitelement aufgehoben gewesen wären, so dafs die einzelnen Massenteilchen sich frei hätten bewegen können, sich in einem Punkte B befunden haben würde. Das Produkt $m.AB$ und die analogen sind dann den von den Verbindungen herrührenden Kräften proportional; da diese sich durch die Verbindungen das Gleichgewicht halten, so ergiebt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn AC eine zu den gegebenen Verbindungen stimmende virtuelle Verschiebung ist, dafs

$$\Sigma m.AB.AC \cos CAB = 0. \tag{14}$$

Nun ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos CAB.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit m und addiert sie zu den analogen, so erhält man durch Benutzung von (14):

$$\Sigma m.BC^2 = \Sigma.mAB^2 + \Sigma m.AC^2$$

oder

$$\Sigma m.BC^2 > \Sigma m.AB^2.$$

BA ist die Abweichung der Masse m, welche im Zeitelement durch die Verbindungen hervorgerufen ist, während BC eine beliebige andere mögliche, zu den gegebenen Bedingungen stimmende Abweichung bedeutet. Betrachtet man $m.AB^2$ und $m.BC^2$ als Mafs des Zwanges, der auf das System ausgeübt wird, wenn

*) Crelles Journal, IV.

die entsprechenden Abweichungen hervorgerufen werden, so läfst der bewiesene Satz sich folgendermafsen ausdrücken:

Das System bewegt sich so, dafs die bestehenden Verbindungen den möglichst kleinen Zwang ausüben.

Die Verbindungen verursachen also eine ähnliche Ausgleichung der verhinderten freien Bewegung wie die ist, welche man bei der Methode der kleinsten Quadrate an einer Anzahl sich widerstreitender Beobachtungen vornimmt.

Das Princip der kleinsten Wirkung und Hamiltons Princip.

45. Um die genannten Principien ohne Anwendung der Variationsrechnung ableiten zu können, wollen wir auf eine Übereinstimmung zwischen den Gleichungen, welche die Gleichgewichtslage eines biegsamen Fadens bestimmen, und den Bewegungsgleichungen der Dynamik aufmerksam machen, eine Übereinstimmung, die es möglich macht, Sätze aus dem einen von diesen Gebieten auf das andere zu übertragen.

Bezeichnet man das Produkt aus Querschnitt und Dichtigkeit mit ρ, so dafs das Massenelement

$$dm = \rho ds \tag{15}$$

ist, und bezeichnet P die wirkende Kraft der Gröfse und Richtung nach, während T die Spannung ist, so kann man der Gleichgewichtsbedingung den Ausdruck

$$dT + P\rho ds = 0 \tag{16}$$

oder

$$\frac{dT}{dm} + P = 0 \tag{17}$$

geben, worin dT den geometrischen Unterschied zwischen zwei konsekutiven Spannungen, und das Zeichen $+$ geometrische Addition bezeichnet.

Betrachtet man die Kurve, welche der Faden in der Gleichgewichtslage bildet, als Bahn eines beweglichen Teilchens mit der Masse m, so hat man

$$\frac{d(mv)}{dt} = P, \tag{18}$$

wo $d(mv)$ den geometrischen Zuwachs der Bewegungsgröfse bedeutet.

Durch Vergleichung der für die Lösung der Probleme ausreichenden Gleichungen (17) und (18) erhält man nun folgenden Satz:

Aus einem Satze über das Gleichgewicht eines biegsamen Fadens kann man einen Satz der Dynamik ableiten, indem man das Massenelement mit dem Zeitelement und die Spannung, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, mit der Bewegungsgröfse vertauscht, während die Kräfte und die Kurve unverändert bleiben.

Da $\frac{1}{\rho} = \frac{ds}{dm}$ bei der Vertauschung durch v, die Spannung durch $-mv$ ersetzt wird, so mufs man, da das bewegte Teilchen in der Dynamik konstante Masse hat, voraussetzen, dafs die Dichtigkeit des Fadens der Spannung umgekehrt proportional ist.

Wir haben hier einen einzelnen Faden betrachtet, aber der Satz gilt natürlich ebenso wohl für ein System von Fäden, die beliebigen Bedingungen unterworfen sind. Sind dieselben z. B. an gewisse Flächen gebunden, so bleiben die Bahnen der beweglichen Teilchen an dieselben

Flächen gebunden. Haben die sich entsprechenden Elemente zweier Fäden konstante Entfernung (die Elemente sollen sich so entsprechen, dafs die passierten Massen gleich grofs sind), so erhalten wir in dem dynamischen Satze zwei Teilchen, die sich mit konstanter Entfernung bewegen, u. s. w.

Indem wir es dem Leser selbst überlassen, die in der Statik abgeleiteten Sätze über biegsame Fäden mit Hülfe des angegebenen Princips zu transformieren, wodurch sich die meisten der bisher abgeleiteten allgemeinen Sätze der Dynamik ergeben werden, wollen wir im besonderen die Gleichgewichtsbedingung für ein System von Fäden, die durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgedrückt ist, tranformieren.

46. Zunächst müssen wir hier eine Bemerkung über die Formel (Statik, S. 100)

$$\delta T + \rho (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

machen, welche den Zuwachs an Spannung bestimmt, wenn man von einem Punkte des Fadens zu dem konsekutiven übergeht. Wenn wir hier voraussetzen, dafs δT das vollständige Differential einer gewissen Funktion der Koordinaten ist, so wird die Formel, wenn die absolute Gröfse der Spannung an einem Punkte gegeben ist, die absolute Gröfse der Spannung an jedem Punkte des Raumes so bestimmen, wie sie sein wird, wenn der Faden bei einer veränderten Richtung der Spannung an dem einen festen Endpunkte des Fadens dahin gebracht wird, durch den betrachteten Punkt zu gehen.

Der Faden kann Bedingungen unterworfen, beispielsweise an eine glatte Fläche gebunden sein.

Nun wenden wir das Princip der virtuellen Geschwin-

digkeiten an, indem wir dem Faden eine beliebige kleine Verschiebung erteilen, welche den gegebenen Bedingungen nicht widerstreitet. Wir nehmen an, dafs ein Bogenelement ds bei der Verschiebung den Zuwachs δds erhält; das diesem entsprechende virtuelle Element ist (Statik, 100)

$$T\delta ds,$$

das jedoch wegen der durch (17) bestimmten Richtung von T mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen werden mufs; man erhält also, wenn die Summation auf alle Elemente des Fadens ausgedehnt wird,

$$\Sigma[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm - T\delta\,.\,ds] = 0\,; \tag{19}$$

diese Gleichung läfst sich bei der Bedeutung, welche T beigelegt worden ist, in der Form

$$\Sigma(ds\delta T + T\delta ds) = 0$$

oder

$$\Sigma\delta\,.\,Tds = 0$$

schreiben; vertauscht man die Zeichen δ und Σ und ersetzt das letztere durch ein Integralzeichen, so erhält man:

$$\delta\int Tds = 0. \tag{20}$$

Diese Formel drückt eine notwendige Bedingung dafür aus, dafs das Integral ein Maximum oder Minimum ist. Sie ist ihrer Ableitung gemäfs in der Weise zu verstehen, dafs, wenn ACB die Gleichgewichtskurve ist, und wir eine beliebige benachbarte Kurve ADB nehmen und für diese bei der angenommenen Bedeutung von T das Integral berechnen, die erste Variation des dadurch bestimmten Integrals Null wird. Die Nachbarkurve ist in der Regel keine Gleichgewichtskurve, aber sie kann eine solche werden, da die Richtung der Spannung an dem einen der festen Endpunkte zwei unendlich nahe bei einander liegende Werte erhalten kann. Ist dies der Fall, so wird

auch die zweite Variation des Integrals gleich Null. (Man vergleiche im folgenden Anwendung 37.) Im besonderen ist zu beachten, dafs die gefundene Formel, wenn ds konstant und die Schwere die einzige wirkende Kraft ist, die bekannte Schwerpunktseigenschaft ergiebt (Statik, 102), und dafs sie, wenn der Faden über eine glatte Fläche gespannt ist und nur unter dem Einflufs der normalen Reaktion dieser Fläche steht, zeigt, dafs die Gleichgewichtsfigur eine geodätische Linie ist.

Der Übersichtlichkeit wegen haben wir einen einzigen Faden betrachtet, aber man sieht leicht, dafs der Satz auch für ein System von Fäden gilt; es kommt nur darauf an, dafs wir, in demselben Sinne wie oben, die Spannung in jedem Elemente angeben können, wenn dasselbe eine zu den gegebenen Bedingungen stimmende kleine Verschiebung erfahren hat.

47. Durch Anwendung unserer Transformation erhalten wir jetzt:

$$\delta \int v ds = 0; \tag{21}$$

aus der obenstehenden Entwickelung folgt unmittelbar, wie diese Formel zu verstehen ist; man mufs voraussetzen, dafs es einen allgemeinen Ausdruck für die lebendige Kraft giebt, der dazu dient die Bedeutung von v für Punkte der benachbarten Kurven zu definieren. Unter derselben Voraussetzung erhalten wir für ein System von Teilchen:

$$\delta . \Sigma . \int m v ds = 0. \tag{22}$$

Dies Princip ist von Maupertuis angegeben und hat den nicht ganz zutreffenden Namen «Princip der kleinsten Wirkung» erhalten.

48. Eine andere Form der transformierten Gleichung erhalten wir, wenn wir (19) verwandeln in

$$\Sigma\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - T\frac{\delta . ds}{dm}\right) dm = 0; \quad (23)$$

hieraus wird, da dm nicht mit der Verschiebung variiert,

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + mv\delta v)\, dt = 0.$$

Wir nehmen an, dafs wir es hier mit einem freien oder an gewisse Bedingungen gebundenen, beweglichen System zu thun haben und setzen

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta U; \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = T, \quad (24)$$

wo die Summation auf alle Teilchen für dasselbe Zeitelement ausgedehnt wird. T ist dann die lebendige Kraft des Systems, während U die Kräftefunktion ist, welche die Zeit, die aber während der Variation konstant sein mufs, explicit enthalten darf. Existiert keine Kräftefunktion, so benutzen wir δU als eine abgekürzte Bezeichnung. Die Gleichung nimmt dadurch die Form

$$\delta \int (U + T)\, dt = 0. \quad (25)$$

an und drückt das Hamiltonsche Princip aus.

Wir denken uns hier feste Anfangs- und Endlagen, die den Zeiten t_0 und t, welche die Grenzen des Integrals werden, entsprechen. Diese Grenzen variieren nicht, da das Zeitelement (Massenelement des Fadens) nicht durch die Variation verändert wird. Um die Bedeutung von δT zu verstehen, hat man zu beachten, dafs

$$\delta v = \frac{\delta ds}{dt}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs, wenn ein Bogenelement AB bei der Variation zu $A_1 B_1$ wird, die variierte Geschwindigkeit diejenige ist, welche das Teilchen besitzen mufs, um $A_1 B_1$ in derselben Zeit wie AB zu durchlaufen. Die Variation der Geschwindigkeit wird also durch die beiden entwickelten Principien auf ganz verschiedene Weise bestimmt; wenn bei der Anwendung von Maupertuis'

Princip die Nachbarkurve gewählt ist, so ist auch die Geschwindigkeit in allen ihren Punkten, und dadurch das Integral bestimmt. Bei Hamiltons Princip dagegen können die Punkte der variierten Kurve den Punkten der ursprünglichen Kurve auf unendlich viele Arten entsprechen, die wieder verschiedene Bestimmungen der variierten Geschwindigkeit mit sich bringen. Die Variationen sind nur dadurch beschränkt, dafs sie mit den gegebenen Bedingungen übereinstimmen und zu einander in endlichen Verhältnissen stehen müssen.

Eliminiert man mit Hülfe der Bedingungsgleichungen möglichst viele Variationen, so dafs die übrigbleibenden unabhängig von einander sind, so mufs die Variation des Integrals aus einer Summe von diesen Variationen bestehen, von denen jede mit einem endlichen Faktor multipliciert ist, und diese Faktoren müssen dann jeder für sich Null sein. Die dadurch erhaltenen Gleichungen sind die für die Lösung des Problemes erforderlichen Differentialgleichungen.

Wir nahmen oben an, dafs die Endpunkte des Fadens fest seien; lassen wir dieselben an der Verschiebung teilnehmen, so müssen die virtuellen Momente der zugehörigen Spannungen mitberücksichtigt werden; durch Transformation erhalten wir dann

$$\delta\int_{t_0}^{t}(U+T)\,dt = \Sigma\left[m\frac{dx}{dt}\delta x + m\frac{dy}{dt}\delta y + m\frac{dz}{dt}\delta z\right]_{t_0}^{t}, \qquad (26)$$

wo der Ausdruck auf der rechten Seite die Differenz bezeichnet zwischen den Werten der virtuellen Momente der Bewegungsgröfsen, welche t und t_0 entsprechen. Später kommen wir auf diese Gleichung zurück.

Man wird erkennen, dafs wir durch die angewandte Betrachtungsweise ein Princip in die Dynamik eingeführt

haben, welches dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten analog ist; man darf nicht glauben, dafs wir dieses Princip bereits bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die verlorenen Kräfte anwandten, denn dort benutzen wir in der That das statische Princip; das dynamische ist hiervon unabhängig, aber die vollkommene Analogie zwischen den beiden Principien hat uns durch die angewandte Transformation in den Stand gesetzt, eine besondere Ableitung des Princips zu unterlassen. Seine Bedeutung giebt sich dadurch hinreichend zu erkennen, dafs die Principien von Maupertuis und Hamilton sich als unmittelbare Folgen des neuen Princips ergeben.

Bedingungsgleichungen. Gleichungen von Lagrange.

49. Im Vorhergehenden haben wir sowohl freie Teilchen betrachtet, als auch solche, deren Bewegung gewissen Beschränkungen unterworfen war; diese Beschränkungen bestanden darin, dafs die Teilchen unter einander oder mit Teilchen aufserhalb des Systems durch Stäbe oder Fäden verbunden waren, dafs Flächen sich berühren sollten u. s. w.; ihren Ausdruck fanden diese Beschränkungen durch gewisse Bedingungsgleichungen, und in der Statik haben wir als Axiom aufgestellt, dafs die Arten der Verbindung gleichgültig sind, wenn nur die Bedingungsgleichungen dieselben bleiben. Wir haben deshalb bei Entwickelung der allgemeinen Principien uns die Bedingungsgleichungen direkt gegeben gedacht, ohne uns um die besonderen Verbindungen zu kümmern, von denen die verschiedenen Bedingungsgleichungen herrühren

können. Wenn wir uns dabei die Bedingungsgleichungen als ganz beliebige gedacht haben, so setzten wir eigentlich voraus, dafs sich für ein beliebiges System von Bedingungsgleichungen immer ein entsprechendes System von Verbindungen müsse finden lassen können. Im entgegengesetzten Falle würde die Aufgabe nämlich ohne Sinn sein. Eine Bedingungsgleichung, welche gewisse Verbindungen ersetzt, ersetzt gewisse Kräfte, denn sie fällt fort, sobald die Bedingungen fortgenommen und durch gewisse Drucke oder Spannungen ersetzt werden; läfst die Gleichung sich dagegen nicht durch Verbindungen ersetzen, so kann es auch nichts geben, was uns zu der Annahme zwingt, dafs die Aufstellung der Bedingung so auf die Teilchen wirken mufs, als ob gewisse Kräfte an ihnen angebracht wären. Wenn wir dies gleichwohl thun, indem wir die Bedingungsgleichungen in allen Fällen auf dieselbe Weise behandeln, so haben wir dadurch der Dynamik in der That eine ideale Erweiterung zuteilwerden lassen.

50. L a g r a n g e hat den Bewegungsgleichungen eine Form gegeben, welche die Kräfte erkennen läfst, die durch die Bedingungen ersetzt werden. Aus einer Bedingungsgleichung $L = 0$ erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots = 0.$$

Diese und die analogen Gleichungen multipliciert man mit den unbestimmten Faktoren λ, $\mu \ldots$ und addiert die Resultate zu der Gleichung (10). Im allgemeinen kann jede Bedingungsgleichung dazu dienen, e i n e Variation fortzuschaffen; da wir aber einen unbestimmten Faktor für jede Bedingungsgleichung eingeführt haben, so lassen

sich alle Variationen als von einander unabhängig betrachten, und die gefundene Gleichung zerfällt dann in ebenso viele Gleichungen, als es Variationen giebt. Diese Gleichungen erhalten die Form

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+X+\lambda\frac{\partial L}{\partial x}+\mu\frac{\partial M}{\partial x}\ldots=0, \qquad (27)$$

woraus hervorgeht, dafs die Bedingungsgleichung $L=0$ auf das Teilchen (x, y, z) wirkt wie eine Kraft mit den Komponenten

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial L}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial L}{\partial z}.$$

Diese Kraft ist normal zu der Fläche gerichtet, an welche das Teilchen (x, y, z) nach der Bedingungsgleichung gebunden ist, wenn die übrigen in der Gleichung enthaltenen Koordinaten für den Augenblick als konstant betrachtet werden.

51. Lagrange hat die dynamischen Gleichungen auch in einer anderen Form dargestellt, bei der er statt der rechtwinkligen Koordinaten ein anderes System von unabhängigen Variablen benutzt. Mit Hülfe der Bedingungsgleichungen lassen sich ebensoviele von den Koordinaten eliminieren als Gleichungen vorhanden sind; dadurch werden jedoch in der Regel sehr komplicierte Ausdrücke entstehen; häufig wird man andere Unabhängige so wählen können, dafs den Bedingungsgleichungen dadurch identisch genügt wird; ist z. B. (x, y, z) an ein Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c, die auf die Koordinatenaxen fallen, gebunden, so kann man

$$x=a\cos\theta;\quad y=b\sin\theta\cos\psi;\quad z=c\sin\theta\sin\psi$$

setzen; dadurch wird der Bedingungsgleichung identisch genügt, und die Anzahl der Unabhängigen ist um eine vermindert.

52. Wir wollen annehmen, wir hätten solche Unabhängige eingeführt, welche alle Bedingungsgleichungen (die nach unserer Annahme die Zeit nicht explicit enthalten dürfen) überflüssig machen, und deshalb wirklich von einander unabhängig sind; diese seien $q_1, q_2, \ldots q_\mu$; dieselben können als ein System von neuen Koordinaten betrachtet werden, da sie die Lage des Systems von Teilchen bestimmen; ihre Derivierten nach der Zeit wollen wir mit $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ bezeichnen.

Nun können wir einen allgemeinen Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems mit Hülfe der neuen Koordinaten und ihrer Derivierten suchen; wir haben nämlich Gleichungen von der Form

$$x = f(q_1, q_2, \ldots q_\mu),$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial f}{\partial q_2} q_2' \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_\mu} q_\mu'; \tag{28}$$

aus dieser Gleichung und den analogen für $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ bilden wir durch Quadrieren und Addieren einen Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit des Teilchens (x, y, z); man sieht, dafs der Ausdruck homogen vom zweiten Grade mit Bezug auf die Derivierten wird, während die Koefficienten Funktionen der neuen Koordinaten sind; multiplicieren wir mit der halben Masse des Teilchens und addieren wir den gefundenen Ausdruck zu den analogen für die übrigen Teilchen, so erhalten wir für die gesamte lebendige Kraft einen Ausdruck von derselben Form wie der oben genannte. Da der Ausdruck homogen vom zweiten Grade in den Derivierten ist, so hat man identisch:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} q_\mu' = 2T. \tag{29}$$

Führt man die neuen Koordinaten in den Ausdruck für die Elementararbeit ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$A_1 dq_1 + A_2 dq_2 \ldots + A_\mu dq_\mu, \tag{30}$$

worin A_1, A_2 ... Funktionen von q_1, q_2, ... q_μ sind. Existiert eine Kräftefunktion, so werden A_1, A_2 ... die partiellen Differentialquotienten derselben.

Nun hat man allgemein:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_1'} dq_1' \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} dq_\mu', \tag{31}$$

so dafs man mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft erhält:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_1'} dq_1' + \ldots = A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \ldots . \tag{32}$$

Dieser Gleichung kann man eine andere Form geben, wenn man dq_1' und die analogen fortschafft; man erhält nämlich aus der Identität (29):

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} dq_1' + q_1' d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \ldots = 2dT = 2(A_1 dq_1 + \ldots),$$

woraus durch Subtraktion von (32) folgt, dafs

$$d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' - \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \ldots = A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \ldots; \tag{33}$$

es ist aber

$$q_1' = \frac{dq_1}{dt}; \quad q_2' = \frac{dq_2}{dt} \ldots,$$

mithin

$$\left(\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - A_1 \right) dq_1 + \ldots = 0. \tag{34}$$

Für die Bildung dieser Gleichung haben wir teils Identitäten benutzt, welche für alle Variationen der darin vorkommenden Variablen gelten, teils die Gleichung für die Variation der lebendigen Kraft. Da letztere unab-

hängig von den Anfangswerten der Koordinaten und deren Derivierten gilt, so können wir dq_1, $dq_2 \ldots$ als von einander unabhängig betrachten, und daraus folgt, dafs jede von diesen Variationen in der gefundenen Gleichung einen Koefficienten haben mufs, der Null ist; wir erhalten also eine neue Form für die Bewegungsgleichungen von Lagrange:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = A_1, \\
&\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_2'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = A_2, \qquad (35) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q_\mu'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = A_\mu;
\end{aligned}
$$

die Anzahl dieser Gleichungen stimmt mit der Anzahl der neuen unabhängig Variablen überein.

Wir wollen beispielsweise annehmen, dafs ein Teilchen von der Masse 1 an eine Kugel von Radius a gebunden sei, und dafs eine Kräftefunktion U existiere. Der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

wird identisch genügt durch

$$x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta \cos \psi; \quad z = a \sin \theta \sin \psi;$$

hieraus wird abgeleitet:

$$2T = v^2 = a^2(\theta'^2 + \sin^2 \theta \psi'^2),$$

woraus

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = a^2 \theta'; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = a^2 \sin \theta \cos \theta \psi'^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = a^2 \sin^2 \theta \psi'; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0;$$

danach ergeben sich die Differentialgleichungen

$$a^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - a^2 \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{\partial U}{\partial \theta};$$

$$a^2 \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{\partial U}{\partial \psi};$$

dies sind die Differentialgleichungen der Bewegung.

Poissons und Hamiltons Gleichungen.

53. Poisson hat den Gleichungen von Lagrange eine neue Form gegeben, indem er als neue Variable statt der Derivierten der neuen Koordinaten gewisse lineare Funktionen von diesen einführt; er setzt nämlich

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2 \ldots \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} = p_\mu. \tag{36}$$

Da die Gröfsen auf der linken Seite homogene lineare Funktionen von $q_1', q_2' \ldots$ sind, so findet man diese durch Lösung der Gleichungen als homogene lineare Funktionen von $p_1, p_2 \ldots p_\mu$, deren Koefficienten Funktionen von $q_1, q_2 \ldots q_\mu$ sind; dadurch wird der Ausdruch für T eine homogene Funktion zweiten Grades von $p_1, p_2 \ldots p_\mu$, deren Koefficienten Funktionen von $q_1, q_2 \ldots q_\mu$ sind.

54. Um die neuen Variablen einzuführen, schreiben wir die Gleichung (33) in der Form

$$q_1' dp_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \ldots = dT;$$

andererseits aber erhalten wir, wenn T durch die Gröfsen p und q ausgedrückt wird,

$$dT = \frac{\partial T}{\partial p_1} dp_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) dq_1 + \ldots,$$

wo die Klammern benutzt sind, um die partiellen Differentialquotienten, die man unter der neuen Form von T

erhält, von den früheren zu unterscheiden. Da die beiden Ausdrücke für dT identisch sein müssen, so müssen sich

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1'; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_1} \tag{37}$$

und die analogen ergeben; die Gleichungen von Lagrange verwandeln sich also, wenn wir jetzt, wo keine Mifsverständnisse mehr stattfinden können, die Klammern fortlassen, in

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_1} = A_1 \tag{38}$$

und die analogen.

Setzen wir hier

$$A_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}; \quad T - U = H, \tag{39}$$

und beachten wir, dafs U die Gröfsen p nicht enthält, so dafs

$$\frac{\partial T}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

ist, so erhalten wir die **Hamiltonsche** Form der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{40}$$

$$(i = 1, 2, 3 \ldots \mu)$$

welche die Gröfsen p und q als Funktionen von t und 2μ willkürlichen Konstanten bestimmen.

Wenn eine Kräftefunktion U nicht existiert, so hat man $\frac{\partial H}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ nur als abgekürzte Bezeichnungen für $\frac{\partial T}{\partial q_i} - A_i$ und $\frac{\partial T}{\partial p_i}$ zu betrachten.

55. Die Gröfsen p wollen wir etwas näher betrachten; wir haben

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt} \\ &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_\mu} q_\mu'. \end{aligned} \tag{41}$$

Es ergiebt sich also

$$\frac{\partial}{\partial q_i'}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i},$$

folglich

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right).$$

Nun ist

$$m\frac{dx}{dt}\delta x = m\frac{dx}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 \dots + \frac{\partial x}{\partial q_\mu}\delta q_\mu\right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, dafs

$$\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\delta x + m\frac{dy}{dt}\delta y + m\frac{dz}{dt}\delta z\right) = \Sigma p_i \delta q_i. \tag{42}$$

Die hierdurch bestimmte Gröfse ist die Summe der virtuellen Momente der Bewegungsgröfsen für die durch δq_1, δq_2 ... bestimmte Verschiebung; deshalb ist es natürlich, p_i als die Komponente der ganzen Bewegungsgröfse nach q_i zu bezeichnen.

56. Hamiltons partielle Differentialgleichungen. Wir setzen

$$V = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt \tag{43}$$

und denken uns dieses Integral auf folgende Weise bestimmt:

Denken wir uns alle unsere Bewegungsgleichungen vollständig integriert, so erhalten wir die Koordinaten ausgedrückt als Funktionen von t und 2μ willkürlichen Konstanten; T und U lassen sich also auf dieselbe Weise ausdrücken, und die Integration liefert V als Funktion

von t_1, t_0 und den 2μ Konstanten. Will man sich eine einzelne der durch die gegebenen Differentialgleichungen bestimmten Bewegungen denken, so mufs man annehmen, dafs den Konstanten dieser Bewegung entsprechende, durch die Anfangsbedingungen bestimmte Werte beigelegt seien. Denkt man sich bei einer solchen Bewegung t_1 als variierend, so erhält man

$$\frac{dV}{dt_1} = [T + U]; \quad (t = t_1). \tag{44}$$

Als willkürliche Konstanten können wir die den Zeiten t_0 und t_1 entsprechenden Koordinaten wählen. V wird dann eine Funktion dieser Gröfsen, sowie von t_0 und t_1. Da t_0 und t_1 ganz willkürlich sind, so können wir eine derselben, beispielsweise t_1, durch t ersetzen. Variiert t, so müssen zugleich die dieser Zeit entsprechenden Koordinaten $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ so variieren, wie die einzelne Bewegung, welche wir betrachten, es mit sich bringt; wir haben also

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= T + U \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt}. \end{aligned} \tag{45}$$

Wir haben uns hier V variierend gedacht, indem wir für eine einzelne, im übrigen aber beliebige von den möglichen Bewegungen t variieren liefsen. Nun wollen wir von einer der möglichen Bewegungen zu einer anderen übergehen, indem wir die Koordinaten $q_1^0, q_2^0 \ldots q_\mu^0$, $q_1, q_2 \ldots q_\mu$, welche den Zeiten t_0 und t entsprechen, ganz beliebig variieren lassen; dadurch erhalten wir

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_1^0}\delta q_1^0 \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu^0}\delta q_\mu^0.$$

Diese Variation ist von der Art, wie wir sie in 48 be-

trachtet haben; dort fanden wir für die Variation einen Ausdruck, aus dem sich uns mit Hülfe von (42) ergiebt:

$$\delta V = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 \dots + p_\mu \delta q_\mu - p_1^0 \delta q_1^0 \dots - p_\mu^0 \delta q_\mu^0. \quad (46)$$

Da die Variationen der Koordinaten willkürlich sind, so folgt aus den beiden Ausdrücken für δV, dafs

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1; \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1^0} = -p_1^0; \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu^0} = -p_\mu^0. \quad (47)$$

Mit Hülfe hiervon verwandelt sich nun (45) in

$$T + U = p_1 q_1' + p_2 q_2' \dots + p_\mu q_\mu' + \frac{\partial V}{\partial t}$$

oder nach (29) in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + T - U = 0$$

oder in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0. \quad (48)$$

In H mufs man sich hier $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ statt p_i eingesetzt denken. Die Gleichung ist dann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche V als Funktion von t, $q_1 \dots q_\mu$ bestimmt, während t_0 und die entsprechenden Koordinaten als Konstanten in ihr vorkommen. Zur näheren Bestimmung der Form, unter der diese in ihr enthalten sind, dient Hamiltons zweite Gleichung

$$-\frac{\partial V}{\partial t_0} + H_0 = 0, \quad (49)$$

die ebenso wie die vorhergehende abgeleitet wird, wenn die Grenzen im Integral (43) vertauscht werden.

Gelingt es die Funktion V zu bestimmen, so hat man, wenn die t_0 entsprechenden Gröfsen p und q als willkürliche Konstanten betrachtet werden, in (47) μ Gleichungen erster Ordnung und μ Gleichungen zwischen

den Koordinaten mit im ganzen 2μ willkürlichen Konstanten.

Als Beispiel wollen wir die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2a,$$

betrachten, aus der sich ergeben:

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b; \quad x = at^2 + bt + c;$$

$$p = \frac{dx}{dt}; \qquad x_0 = at_0^2 + bt_0 + c;$$

$$T = \tfrac{1}{2}p^2; \quad U = 2ax; \quad T + U = (2at+b)^2 + 2ac - \tfrac{1}{2}b^2.$$

$$V = \frac{1}{6a}[(2at+b)^3 - (2at_0+b)^3] + (2ac - \tfrac{1}{2}b^2)(t-t_0).$$

Aus der letzten Gleichung schafft man b und c fort durch die Gleichungen

$$b(t-t_0) = x - x_0 - a(t^2 - t_0^2),$$

$$c(t-t_0) = att_0(t-t_0) + x_0 t - xt_0.$$

Dadurch erhält man nach einigen Reduktionen

$$V = a(x+x_0)(t-t_0) + \tfrac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} - \frac{a^2}{6}(t-t_0)^3.$$

Ferner ist

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 - 2ax,$$

also sind die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = 2ax; \quad \frac{\partial V}{\partial t_0} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 - 2ax,$$

denen, wie leicht ersichtlich, genügt wird. Hätte man V mit Hülfe dieser Gleichungen bestimmt, so würde (47) ergeben:

$$a(t-t_0) + \frac{x-x_0}{t-t_0} = \frac{dx}{dt}; \quad a(t-t_0) - \frac{x-x_0}{t-t_0} = -p_0;$$

diese beiden Gleichungen stimmen, wenn man

$$p_0 = 2at_0 + b; \quad x_0 = at_0^2 + bt_0 + c$$

setzt, mit den oben abgeleiteten Gleichungen überein.

Anwendungen.

1. An den beiden Enden eines Seiles, das über eine Rolle läuft, hängen zwei gleich schwere Personen in derselben Höhe über der Erde. Wenn die eine Person an dem Seil hinaufklettert, während die andere sich ruhig verhält, so gelangen beide dennoch gleich schnell nach oben. Auf beide wirken nämlich dieselben Kräfte: Gewicht und Spannung des Seiles. Reibung, Gewicht des Seiles u. s. w. ist aufser Acht zu lassen.

2. Ein Jäger erzählte, dafs ein Hirsch, den er im Sprunge traf, sich ein paarmal in der Luft überschlagen habe, bevor er niederfiel. Diese Geschichte ist offenbar ein Produkt der Phantasie des Jägers, denn selbst wenn der Hirsch die Erde mit einer kleinen Rotation verlassen hätte, so hätte doch weder das durch die Kugel demselben erteilte Moment, noch ein Zusammenziehen seines Körpers, noch der Luftwiderstand das angegebene Resultat herbeiführen können.

3. Wenn zwei ganz gleiche Eier, von denen das eine roh, das andere hartgekocht ist, dieselbe schiefe Ebene hinunterrollen, so erhält das letztere die geringere Geschwindigkeit, weil der Inhalt des rohen Eies nur in geringem Grade an der Rotation teilnimmt. (Dies beobachtet man auch leicht, wenn man mit Hülfe zweier Finger zwei solche Eier auf einem Tische in Umdrehung versetzt; das rohe Ei wird dann viel früher zur Ruhe kommen als das andere, weil man ihm keine so grofse lebendige Kraft mitteilen kann). Die von der Schwere ausgeführte Arbeit wird in lebendige Kraft umgesetzt, von dieser aber gebraucht das hartgekochte Ei einen bedeutenden Teil zu seiner Rotation.

4. Auf einer glatten horizontalen Ebene steht ein Körper von der Masse m, der oben von einer glatten schiefen Ebene begrenzt ist; an dieser gleitet ein schweres Teilchen von der Masse m_1 herunter. Eine durch das Teilchen gelegte Ebene, welche senkrecht auf der unteren Kante der schiefen Ebene steht, enthält den Schwerpunkt des Körpers. Bestimme die Bewegung.

Man benutze das Princip des Schwerpunktes und das Princip der lebendigen Kraft.

5. Ein homogener Kreiscylinder von der Dichtigkeit ρ, der Höhe h und dem Radius a dreht sich um seine Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Wie grofs ist die Momentensumme der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf die Axe?

Ein Element dm mit dem Abstande r von der Axe hat eine Bewegungsgröfse $r\omega dm$, deren Moment gleich $r^2\omega dm$ ist. Als Massenelement können wir eine Cylinderschale von der Dicke dr nehmen; die Masse derselben ist $2\pi\rho h r dr$; dann ist die gesuchte Momentensumme

$$2\pi\rho h\omega\int_0^a r^3 dr = \frac{a^2}{2} \cdot M \cdot \omega\,,$$

wo M die Masse des Cylinders bedeutet.

Man sieht leicht, dafs die Momentensumme mit Bezug auf eine zweite durch den Schwerpunkt gelegte Axe, die auf der ersten senkrecht steht, gleich Null ist.

6. Ist in der vorhergehenden Aufgabe ω variabel, und hat die Axe des Cylinders zugleich eine Translation mit der geometrischen Geschwindigkeit v, welches ist dann die statische Summe der wirkenden äufseren Kräfte?

Da die Momentensumme in der Zeit dt den Zuwachs $\frac{1}{2}a^2 M d\omega$ erhält, so mufs ein äufseres Kräftepaar

$$\tfrac{1}{2}a^2 M \frac{d\omega}{dt}$$

wirksam sein, dessen Axe der des Cylinders parallel ist. Zugleich mufs eine Einzelkraft im Schwerpunkt angreifen, die der Gröfse und Richtung nach durch

$$M\frac{dv}{dt}$$

bestimmt wird.

7. Ein homogener Stab von der Länge $2l$ und der Masse M bewegt sich in willkürlicher Weise in einer Ebene; man bestimme die statische Summe der äufseren Kräfte.

Zur Zeit t möge die Winkelgeschwindigkeit ω sein, während die geometrische Geschwindigkeit des Schwerpunktes v ist. Die gesuchte Summe besteht dann aus einem Kräftepaar:

$$\tfrac{1}{3}l^2 M \frac{d\omega}{dt},$$

dessen Axe senkrecht auf der Ebene steht, und einer Einzelkraft, welche im Schwerpunkt angreift und der Gröfse und Richtung nach bestimmt wird durch

$$M\frac{dv}{dt}.$$

8. In den beiden vorhergehenden Aufgaben soll die lebendige Kraft für die Zeit t, und der Zuwachs derselben im Zeitelemente bestimmt werden, ebenso die im Zeitelemente von den gefundenen äufseren Kräften ausgeführte Arbeit.

9. Beweise, dafs die von einem Kräftepaar, welches auf einen Körper wirkt, im Zeitelement ausgeführte

Arbeit ist gleich

$$\omega Q \cos a \,.\, dt,$$

wenn Q das Moment des Kräftepaares, ω die Winkelgeschwindigkeit und a den Winkel bedeutet, welchen die Axe des Kräftepaares mit der augenblicklichen Rotationsaxe bildet.

Bei einer Translation führt das Kräftepaar keine Arbeit aus. Um die durch die Rotation ausgeführte Arbeit zu bestimmen, verlege man das Kräftepaar mit dem einen Endpunkt des Arms an die augenblichliche Axe und drehe dasselbe darauf in seiner Ebene, bis der Arm senkrecht auf der augenblicklichen Axe steht.

10. Ein Körper rotiert um eine feste Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Bestimme das Verhältnis zwischen der Momentensumme der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf die feste Axe und der lebendigen Kraft des Körpers.

11. Um den in Aufgabe 5 genannten Cylinder rotiert eine Cylinderschale von derselben Höhe und Dichtigkeit; der innere Radius ist a, der äufsere $2a$ und die Winkelgeschwindigkeit 2ω. Wenn beide Teile plötzlich zu einem Cylinder vereinigt werden, mit welcher Winkelgeschwindigkeit setzt dieser dann seine Bewegung fort?

Vor der Verbindung betrug die Momentensumme mit Bezug auf die Axe

$$\frac{a^2}{2} M\omega + 15 a^2 M\omega\,;$$

da diese Momentensumme nicht durch innere Kräfte verändert werden kann, so erhält man

$$\frac{31}{2} a^2 M\omega = \frac{(2a)^2}{2} \,.\, 4M \,.\, \omega_1,$$

wo ω_1 die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ist.

12. Ein homogener Cylinder wie der obengenannte ist in unendlich dünne koncentrische Schalen geteilt; dieselben rotieren mit Winkelgeschwindigkeiten, die der vierten Potenz ihrer Radien proportional sind. Die äusserste Schale hat die Winkelgeschwindigkeit ω. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit setzt sich die Bewegung fort, wenn alle Schalen plötzlich mit einander verbunden werden, und wie grofs ist die lebendige Kraft des ganzen Systems vor und nach der Verbindung?

13. Ein homogener Stab von der Länge $2l$ und der Masse M rotiert in einer Ebene um seinen Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω; durch einen Stofs wird demselben eine Bewegungsgröfse $Ml\omega$ mitgeteilt, welche in der Rotationsebene liegt, senkrecht zum Stabe gerichtet ist und an demselben in einem Punkte angreift, der mitten zwischen dem Mittelpunkt und dem einen Endpunkt des Stabes liegt. Bestimme die Bewegung des Stabes.

Verlegt man die Stofskraft an den Schwerpunkt, so ergiebt sich, dafs dieser eine Geschwindigkeit $l\omega$ in der Richtung der Stofskraft erhält. Das durch die Verlegung hinzugekommene Kräftepaar hat das Moment $\frac{1}{2}l^2M\omega$. Die Momentensumme nach dem Stofse wird deshalb (Aufg. 7) entweder $\frac{5}{6}l^2M\omega$ oder $-\frac{1}{6}l^2M\omega$, je nachdem der Stofs im Sinne der vorhandenen Bewegung oder ihr entgegen wirkt. Die Winkelgeschwindigkeit wird deshalb $\frac{5}{2}\omega$ oder $-\frac{1}{2}\omega$.

14. Eine schwere homogene Linie von der Länge $2l$ und dem Gewicht mg stützt sich mit ihren Endpunkten an eine horizontale und eine senkrechte Gerade. Dieselbe beginnt ohne Reibungswiderstand zu gleiten,

als sie mit der senkrechten Geraden einen Winkel v_0 bildet. Bestimme die Bewegung.

Wenn der Winkel mit der Senkrechten v beträgt, so ist die von der Schwere ausgeführte Arbeit

$$mgl(\cos v_0 - \cos v).$$

Nimmt man die beiden Geraden zu Axen, so werden die Koordinaten des Schwerpunktes $l \sin v$ und $l \cos v$, die Geschwindigkeit desselben also $l\frac{dv}{dt}$, so dafs der eine Teil der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ beträgt. Der von der Rotation um den Schwerpunkt herrührende Teil der lebendigen Kraft wird $\frac{1}{6}ml^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$, so dafs das Princip der lebendigen Kraft ergiebt:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2l}(\cos v_0 - \cos v);$$

hieraus geht hervor, dafs die Bewegung eine Pendelbewegung ist.

Um die Drucke zu finden, suchen wir die verlorenen Kräfte nach den Axen. Bedeutet X die Reaktion der senkrechten Geraden, so erhalten wir

$$X = \Sigma\frac{d^2x}{dt^2}dm = m\frac{d^2.l\sin v}{dt^2}$$

$$= lm\left(\cos v\frac{d^2v}{dt^2} - \sin v\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right).$$

Aus der Bewegungsgleichung ergiebt sich indessen

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{3g}{4l}\sin v,$$

so dafs

$$X = \frac{3}{4}mg\sin v(3\cos v - 2\cos v_0).$$

Man sieht hieraus, dafs der Stab die senkrechte Gerade, wenn sein oberer Endpunkt nicht an dieselbe

gebunden ist, verläfst, sobald $\cos v = \frac{2}{3}\cos v_0$, und die Fortsetzung der Bewegung wird dann durch andere Formeln bestimmt. Für die Reaktion der horizontalen Geraden erhält man

$$Y = \tfrac{1}{4} mg (1 - 6 \cos v_0 \cos v + 9 \cos^2 v).$$

Wenn der obere Endpunkt des Stabes die senkrechte Gerade verläfst, so sind bei der folgenden Bewegung keine horizontalen Kräfte wirksam; die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach der x-Axe wird also konstant, nämlich

$$k = \tfrac{1}{3} \sqrt{2gl} \cos^{\frac{3}{2}} v_0,$$

was sich ergiebt, wenn man in den Ausdruck für $\frac{dx}{dt} = \frac{d.l \sin v}{dt}$ für $\cos v$ den Wert $\frac{2}{3}\cos v_0$ einsetzt.

In dem Augenblick, wo der Stab die senkrechte Gerade verläfst, hat er eine lebendige Kraft

$$\tfrac{2}{3} ml^2 . \frac{3g}{2l} (\cos v_0 - \tfrac{2}{3} \cos v_0) = \tfrac{1}{3} mgl \cos v_0.$$

Wenn der Winkel mit der senkrechten Geraden v geworden ist, so ist die lebendige Kraft gleich

$$\tfrac{1}{2} mk^2 + \tfrac{1}{2} ml^2 \sin^2 v \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{6} ml^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Der Zuwachs beträgt also

$$\tfrac{1}{6} ml^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 (1 + 3 \sin^2 v) + \tfrac{1}{9} mgl \cos v_0 (\cos^2 v_0 - 3),$$

während die von der Schwere ausgeführte Arbeit gleich ist

$$mgl (\tfrac{2}{3} \cos v_0 - \cos v);$$

die Differentialgleichung der Bewegung wird also

$$l \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 (1 + 3 \sin^2 v) + 6g \cos v = 6g \cos v_0 - \tfrac{2}{3} g \cos^3 v_0,$$

eine Gleichung, die sich nicht unter endlicher Form integrieren läfst. Sie zeigt, das der Stab für $v = \frac{\pi}{2}$ die

x-Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit erreicht, deren Quadrat gleich ist

$$\frac{g}{l}\left(\tfrac{3}{2}\cos v_0 - \tfrac{1}{6}\cos^3 v_0\right).$$

Der Druck auf die x-Axe wird bestimmt durch

$$Y = mg + m\frac{d^2 . l\cos v}{dt^2}$$

$$= mg - ml\left(\sin v\frac{d^2v}{dt^2} + \cos v\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right);$$

aus dieser Gleichung lassen sich die Differentialquotienten mit Hülfe der Differentialgleichung fortschaffen.

15. Ein homogener Stab von der Länge und Masse $2l$ ist mit Hülfe von zwei dünnen Fäden horizontal aufgehängt; die beiden Fäden sind an den Endpunkten des Stabes befestigt und gehen von demselben festen Punkte aus, so dafs das ganze System ein gleichseitiges Dreieck bildet. Wie grofs ist die Spannung in dem einen Faden in dem Augenblick, wo der andere Faden durchschnitten wird?

Der feste Punkt möge der Anfangspunkt sein, während die x-Axe dem Stabe parallel ist, die y-Axe positiv nach oben gerechnet wird; v und θ seien die Winkel, welche der nicht durchschnittene Faden und der Stab mit der x-Axe kurze Zeit nach dem Durchschneiden des anderen Fadens bilden; T sei die Spannung und (x, y) der Mittelpunkt des Stabes; dann ist

$$y = -l(2\sin v + \sin\theta);\quad x = -l(2\cos v - \cos\theta),$$

mithin

$$\frac{d^2y}{dt^2} = l\left(2\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 2\cos v\frac{d^2v}{dt^2} + \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l\left(2\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2\sin v\frac{d^2v}{dt^2} - \cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

Setzt man diese Ausdrücke ein in die Bewegungsgleichungen

$$2l\frac{d^2x}{dt^2} = T\cos v;\quad 2l\frac{d^2y}{dt^2} = T\sin v - 2lg;$$

$$Tl\sin(v+\theta) = \tfrac{2}{3}l^3\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

und beachtet man, dafs bei Beginn der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = 0;\quad \frac{d\theta}{dt} = 0;\quad \theta = 0;\quad v = \frac{\pi}{3}$$

war, so findet man nach Elimination von $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ und $\frac{d^2v}{dt^2}$, dafs

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{13}.2lg.$$

16. Zwei schwere Teilchen mit den Massen m und m_1 bewegen sich in einer vertikalen Ebene, jede auf einer besonderen Geraden; diese beiden Geraden bilden mit der Horizontalen die Winkel a und a_1; an ihrem Durchschnittspunkt befindet sich eine kleine Rolle; über diese läuft ein Faden von der Länge l, der die beiden Teilchen verbindet. Bestimme die Bewegung.

Es seien x und x_1 die Längen der beiden Fadenstücke, so dafs

$$x + x_1 = l.$$

Durch eine kleine Bewegung, welche den gegebenen Bedingungen nicht widerstreitet, erfahren x und x_1 die Zunahmen δx und δx_1. Da die Fadenlänge nicht verändert wird, so fällt das virtuelle Moment der Spannung fort, und d'Alemberts Princip ergiebt:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - mg\sin a\right)\delta x + \left(m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1 g\sin a_1\right)\delta x_1 = 0;$$

da $\delta x + \delta x_1 = 0$, so folgt hieraus

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = mg\sin a - m_1 g\sin a_1,$$

wo die Integration leicht zu bewerkstelligen ist. Die Konstanten sind beispielsweise bestimmt, sobald man die Lage der Teilchen und die Geschwindigkeit des einen für $t = 0$ kennt. Natürlich wird vorausgesetzt, dafs der Faden während der ganzen Bewegung gespannt bleibt.

17. Ein Kreis erweitert sich in der Weise, dafs sein Radius proportional der Zeit wächst. Bestimme die Bewegung eines an den Kreis gebundenen Teilchens, auf das keine äufseren Kräfte wirken.

Man hat

$$x^2 + y^2 = a^2t^2, \quad \text{woraus} \quad x\delta x + y\delta y = 0;$$

dadurch verwandelt sich die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y = 0 \quad \text{in} \quad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

hierdurch wird ausgedrückt, dafs das Princip der Flächen gültig ist, was auch unmittelbar einleuchtet, da die einzige wirkende Kraft, der Druck des Kreises auf das Teilchen, durch den Kreismittelpunkt geht.

Durch Anwendung von Polarkoordinaten würde man erhalten haben:

$$r = at; \quad R\delta r + Fr\delta\theta = 0,$$

wo R und F die Komponenten der Beschleunigung nach Radiusvektor und senkrecht dazu sind; diese sind (Kinematik, S. 42, Aufg. 26)

$$R = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2; \quad F = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Nun giebt die erste Gleichung $\delta r = 0$, und dadurch verwandelt sich die zweite in $F = 0$ oder in

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = k = bat_0,$$

wo b die t_0 entsprechende Geschwindigkeit senkrecht zum Radius ist; diese Komponente kann beliebig sein,

während die nach dem Radiusvektor nur a sein kann, da sie durch die Erweiterung des Kreises bestimmt ist. Nun erhält man

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{bt_0}{at^2}; \quad \theta = -\frac{bt_0}{at} + c = -\frac{bt_0}{r} + c.$$

Das Teilchen beschreibt also eine hyperbolische Spirale.

18. Eine Kreisperipherie dreht sich in ihrer Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen ihrer Punkte. Bestimme die Bewegung eines an die Peripherie gebundenen Teilchens, welches die Bewegung ohne Geschwindigkeit in dem Punkte beginnt, welcher dem festen Punkte diametral entgegengesetzt ist.

19. Zwei Teilchen A und B mit den Massen m und m_1 bewegen sich, indem sie sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Man bestimme die Bewegung.

Der Schwerpunkt O bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, welche (nach Gröfse und Richtung) durch die Geschwindigkeiten der Teilchen in einem willkürlich gewählten Augenblich bestimmt wird. Wenn wir die relative Bewegung mit Bezug auf den Schwerpunkt betrachten, so können wir diesen Punkt als fest annehmen.

Auf die Masse m wirkt die Kraft $\frac{\mu m m_1}{AB^2}$, die gegen O gerichtet ist; nun ist

$$r = OA = \frac{m_1}{m + m_1} . BA;$$

dadurch erhält man für die beschleunigende Kraft

$$\frac{\mu m_1^3}{(m + m_1)^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot$$

die Bewegung ist also identisch mit derjenigen, welche wir bei der Planetenbewegung untersucht haben; die

beiden Teilchen beschreiben perspektivisch-ähnliche Kegelschnitte mit O als gemeinschaftlichem Brennpunkt.

20. Eine Person springt von dem einen Ende eines Brettes nach dem anderen. Das Brett, welches dasselbe Gewicht hat wie die Person, liegt auf einem glatten Fufsboden. Welches ist der kleinste Wert, den die Anfangsgeschwindigkeit haben kann?

Person und Brett erhalten nach dem Princip des Schwerpunktes gleich grofse und entgegengesetzte Geschwindigkeitskomponenten. Die wirkliche Länge des Sprunges ist deshalb gleich der halben Länge des Brettes. Ist diese gleich l, und bildet die Anfangsgeschwindigkeit a den Winkel α mit der Horizontalen, so hat man nach dem bei der Wurfbewegung für die Wurfweite gefundenen Ausdruck:

$$a^2 \sin 2\alpha = gl;$$

hieraus geht hervor, dafs man haben mufs:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad a = \sqrt{gl}.$$

21. Eine homogene rauhe Stange stützt sich an eine glatte horizontale und eine glatte vertikale Ebene, und ist senkrecht zur Durchschnittslinie der beiden Ebenen gerichtet. Ein Affe klettert an der Stange hinunter und verhindert sie dadurch am Gleiten. Man bestimme die Geschwindigkeit des Affen.

Ist α der Winkel, welchen die Stange mit der horizontalen Ebene bildet, m die Masse und $g \sin \alpha + \varphi$ (der erste Teil rührt von der Schwere her) die Beschleunigung des Affen, so wirkt dieser auf die Stange mit einem normalen Druck $mg \cos \alpha$ und einer längs der Stange gerichteten Kraft $m\varphi$. Fügt man diese Kräfte zu den übrigen hinzu, welche auf die Stange wirken, so soll die

Stange im Gleichgewicht sein; dadurch bestimmt man φ und daraus v.

22. Eine Person läuft ein Brett hinunter, welches auf einer glatten schiefen Ebene von der Neigung α liegt. Man bestimme die Bewegung, wenn das Verhältnis der Massen gleich f gegeben ist und Person und Brett gleichzeitig ohne Geschwindigkeit sind.

23. Ein homogener schwerer Cylinder rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinunter. Bestimme die Bewegung.

24. Ein anderer Cylinder rollt dieselbe schiefe Ebene hinunter; er hat dieselben Dimensionen und dieselbe Dichtigkeit wie der obengenannte, besteht aber aus einer dünnen Schale, die mit Flüssigkeit gefüllt ist. Es wird vorausgesetzt, das diese Flüssigkeit nicht rotiert während der Cylinder hinunterrollt. Bestimme das Verhältnis zwischen den Zeiten, welche die beiden Cylinder gebrauchen, um dieselbe Länge der schiefen Ebene zu durchlaufen. Beide Cylinder beginnen die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

25. Ein schwerer homogener Kreiscylinder von der Masse m und dem Radius a rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinunter, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine horizontale Gerade dreht. Bei Beginn der Bewegung war die Ebene horizontal und der Cylinder, der sich in Ruhe befand, berührte sie längs der Linie, um welche sie rotiert. Bestimme die Bewegung.

Wir betrachten einen Schnitt, der durch den Schwerpunkt senkrecht zur Rotationsaxe gelegt ist, nehmen den Schnittpunkt mit dieser zum Anfangspunkt, die x-Axe

horizontal, die y-Axe senkrecht und rechnen sie positiv nach unten.

Auf den Cylinder wirken drei Kräfte, nämlich das Gewicht mg in seinem Schwerpunkt (x_1, y_1), die normale Reaktion P der Fläche und der Reibungswiderstand F, der das Gleiten des Cylinders verhindert, und in jedem Augenblick die dazu erforderliche Gröfse besitzt. Von der rollenden Reibung wird abgesehen.

Ist ωt der von der Ebene durchlaufene Winkel, so erhalten wir, wenn wir nach den Axen zerlegen,

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -F\cos\omega t + P\sin\omega t,$$

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = mg - F\sin\omega t - P\cos\omega t.$$

Die Rotation um die Axe des Cylinders wird bestimmt durch (vergl. Anwendung 6, S. 103)

$$m\frac{a^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aF.$$

Der Winkel, um den der Cylinder sich gedreht hat, ist die Summe von zwei Winkeln, nämlich von dem, um welchen er sich in Bezug auf die Ebene gedreht hat, und von dem Winkel ωt, um welchen die Ebene sich gedreht hat. Da die zweite Derivierte des letzteren Null ist, so können wir unter φ den ersteren verstehen, so das $a\varphi$ die Entfernung zwischen Anfangspunkt und Berührungspunkt ist.

Eliminieren wir nun F und P, so erhalten wir

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\cos\omega t + \frac{d^2y_1}{dt^2}\sin\omega t + \frac{a}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\sin\omega t.$$

Nun ist

$$x_1 = a\varphi\cos\omega t + a\sin\omega t,$$

$$y_1 = a\varphi\sin\omega t - a\cos\omega t.$$

Setzt man diese Werte ein, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in die folgende:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \tfrac{2}{3}\,\omega^2\varphi = \frac{2g}{3a}\sin\omega t,$$

die linear ist mit konstanten Koefficienten. Integriert man, so erhält man, da für $t = 0$ zugleich $\varphi = 0$ und $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist,

$$a\varphi = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{g}{5\omega^2}\left(e^{\omega\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot t} - e^{-\omega\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot t}\right) - \frac{2g}{5\omega^2}\sin\omega t;$$

diese Gleichung gilt nur solange, bis P das Zeichen wechselt; in diesem Moment verläfst der Cylinder die Ebene und bewegt sich mit der erlangten Winkelgeschwindigkeit weiter, indem sein Schwerpunkt den Gesetzen der Wurfbewegung folgt.

Bei dieser Aufgabe kann man das Princip der lebendigen Kraft nicht anwenden, weil die Gleichung der Ebene die Zeit explicit enthält. Dagegen kann man d'Alemberts Princip anwenden und dadurch direkt zu der Bewegungsgleichung gelangen ohne F und P einzuführen.

Um dies zu erreichen, betrachten wir die Ebene als fest (geben t einen willkürlichen konstanten Wert). Die virtuelle Bewegung, die mit den gegebenen Bedingungen vereinbar ist, besteht in einer kleinen Rollung auf der Ebene. Dadurch ist das virtuelle Moment von P gleich Null, aber auch das virtuelle Moment von F ist Null, weil der Reibungswiderstand nicht überwunden wird. (Die Bewegung des Angriffspunktes ist unendlich klein von zweiter Ordnung.)

Nun suchen wir die verlorenen Kräfte. Von äufseren Kräften hat man nur die Kraft mg, die im Schwerpunkt angreift und das virtuelle Moment $mga\sin\omega t\delta a$ hat, wo

δa den unendlich kleinen Winkel bedeutet, um den der Cylinder bei der virtuellen Bewegung gedreht ist.

Die Effektivkräfte, d. h. die statische Summe der Zunahmen der Bewegungsgröfsen, sind, bezogen auf die Zeiteinheit (man vergl. Anwend. 6, S. 103),

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} \text{ und } m\frac{d^2y_1}{dt^2}$$

mit dem virtuellen Moment

$$\left(m\frac{d^2x_1}{dt^2}\cos\omega t + m\frac{d^2y_1}{dt^2}\sin\omega t\right)a\delta a,$$

und das Kräftepaar mit dem Moment

$$\frac{a^2}{2}m\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

dessen virtuelles Moment bei der kleinen Drehung (man vergleiche Anwend. 9, S. 104) durch Multiplikation mit δa gefunden wird. Nun ergiebt d'Alemberts Princip

$$\left(m\frac{d^2x_1}{dt^2}\cos\omega t + m\frac{d^2y_1}{dt^2}\sin\omega t\right)a + \frac{a^2}{2}m\frac{d^2\theta}{dt^2} = mga\sin\omega t,$$

eine Gleichung, die mit der früher gefundenen übereinstimmt.

26. Auf einer glatten horizontalen Unterlage steht ein Körper, durchbohrt von einem dünnen kreisförmigen Kanal, der in einer vertikalen, durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Ebene liegt. Im Kanale schwingt ein schweres Teilchen ohne Reibung. Bei Beginn der Bewegung befindet das Teilchen sich in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkt des Kreises und liegt genau im Schwerpunkt des Körpers. Das Teilchen und der Körper haben gleich grofse Massen und der Radius des Kreises ist a; bestimme die Bewegung.

27. Eine homogene kreisförmige Scheibe liegt horizontal und kann sich ohne Reibung um eine vertikale

durch den Mittelpunkt gehende Axe drehen. Der Radius der Scheibe ist 13 m lang, und 1 qm derselben wiegt 15 kg. Eine Person, welche 80 kg wiegt, geht auf dem Umfang der Scheibe herum. Wo befindet sie sich auf der Scheibe, wenn sie an ihre ursprüngliche Stelle im Raum zurückgekehrt ist?

28. Die obengenannte Scheibe rotiert, während die Person sich an der Peripherie befindet, mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit, dafs sie eine Umdrehung in 100 Sekunden macht. Die Person geht von der Peripherie längs eines Radius auf den Mittelpunkt zu; ihre Geschwindigkeit, auf dem Radius gemessen, beträgt 1 m in 2 Sekunden. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe.

29. Zwei homogene Kreiscylinder mit den Massen M und M_1, den Radien r und r_1 und von gleicher Höhe rotieren um feste parallele Axen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und ω_1 und entgegengesetzten Umlaufsrichtungen. Sie werden zu einer Berührung längs einer Seitenlinie gebracht, und der Reibungswiderstand ist dann grofs genug, um jedes Gleiten zu verhindern. Mit welchen Winkelgeschwindigkeiten wird die Bewegung fortgesetzt?

Bedeutet F die tangential wirkende Stofskraft, ω' und ω_1' die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stofse, so erhält man

$$\frac{r^2}{2} M(\omega' - \omega) = rF; \quad \frac{r_1^2}{2} M_1(\omega_1 - \omega_1') = r_1 F;$$

$$r\omega' = r_1 \omega_1'.$$

Später werden wir sehen, wie dieselbe Aufgabe mittels d'Alemberts Princip gelöst wird.

30. Eine schwere homogene Kette hängt über einer Rolle mit den Enden in ungleicher Höhe; bestimme die Bewegung. Von Masse und Reibung der Rolle ist abzusehen.

31. Ein Teilchen ist an eine logarithmische Spirale gebunden, die in ihrer Ebene um ihren Pol mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Bei Beginn der Bewegung ist die Geschwindigkeit des Teilchens identisch mit der Geschwindigkeit desjenigen Punktes der Spirale, in welchem das Teilchen sich befindet. Man bestimme die Bahn des Teilchens.

32. Ein Ring von der Masse m und dem Radius a liegt in einer vertikalen Ebene und dreht sich in dieser um seinen festen Mittelpunkt, weil eine Maus von der Masse m_1 an demselben hinaufläuft. Bestimme die Bewegung des Ringes, wenn die Maus beständig an derselben Stelle des Raumes verbleibt.

T und N seien die tangentiale und normale Komponente der Kraft, mit welcher die Maus auf den Ring einwirkt. Dann erhält man, wenn man die Momente mit Bezug auf den Mittelpunkt nimmt,

$$ma^2 \frac{d\omega}{dt} = Ta;$$

da die Maus im Gleichgewicht ist, so hat man

$$T = m_1 g \sin \alpha,$$

wo α den Winkel zwischen dem senkrechten Radius und demjenigen bedeutet, an dessen Endpunkt die Maus sich befindet. Man erhält also

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 g}{ma} \sin \alpha,$$

woraus sich ergiebt, dafs die Rotation mit gleichmäfsig wachsender Geschwindigkeit vor sich geht.

Man hätte auch

$$m a^2 d\omega$$

als Zuwachs der ganzen Momentensumme nehmen können; die äufsere wirkende Kraft $m_1 g$ hat das Moment

$$m_1 g \,.\, a \sin \alpha;$$

man gelangt also zu derselben Gleichung. Durch Integration erhält man

$$\tfrac{1}{2} m a^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = m_1 a g \sin \alpha \, (\theta - \theta_0),$$

woraus hervorgeht, dafs die von der Maus ausgeführte Arbeit dieselbe ist, wie wenn sie eine schiefe Ebene von der Neigung α eine Strecke hinaufgelaufen wäre, die dem von ihr wirklich durchlaufenen Bogenstück gleich ist.

33. Bestimme die Winkelgeschwindigkeit des Ringes, wenn die Verhältnisse dieselben sind wie in der vorhergehenden Aufgabe, die absolute Winkelgeschwindigkeit der Maus um den Mittelpunkt aber ω_1 ist.

34. Zwei gleiche homogene Cylinder berühren sich längs einer Seitenlinie und rotieren mit gleich grofsen und entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeiten um ihre festen Axen. Plötzlich wird die Verbindung längs der Seitenlinie fest, während gleichzeitig die Axen frei werden. Wie wird die Bewegung fortgesetzt? Von welcher Art ist die auftretende Stofskraft?

35. Ein homogener Stab von der Länge $2l$ rotiert in einer Ebene um seinen Mittelpunkt mit der Anfangsgeschwindgkeit ω_0. Von äufseren Kräften ist nur der Widerstand des Mittels wirksam: dieser ist dem Quadrate der Geschwindigkeit des angegriffenen Elements proportional und beträgt μ für die Geschwindigkeit 1, bezogen auf die Längeneinheit. Bestimme die Bewegung.

Da das System eine feste Axe hat, so brauchen wir nur die Momente der verlorenen Kräfte mit Bezug auf diese zu betrachten. Für die Momentensumme der Effektivkräfte erhält man, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und k die Masse der Längeneinheit bedeutet,

$$k\int_{-l}^{+l} x^2 dx \frac{d\omega}{dt} = \frac{2k}{3} l^3 \frac{d\omega}{dt}.$$

Für das Moment des Widerstandes erhält man

$$2\mu\int_0^{+l} x^3 dx \,.\, \omega^2 = \frac{\mu}{2} l^4 \omega^2;$$

die Bewegungsgleichung wird also:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3\mu l}{4k}\omega^2,$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{3\mu l}{4k} \,.\, t.$$

36. Wenn die Verhältnisse dieselben bleiben wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Axe aber den Stab nach dem Verhältnis 1 : 2 teilt, welchen Druck erfährt dann die Axe während der Bewegung?

37. Berechne $\int v ds$ für die Wurfbewegung, wenn die Anfangsgeschwindigkeit a den Winkel $\frac{\pi}{4} + \alpha$ mit der Horizontalen bildet und das Integral bis auf den Punkt ausgedehnt wird, in welchem das Teilchen dieselbe horizontale Gerade, von der aus es geworfen wurde, wieder erreicht.

Man hat

$$\int v ds = \int v^2 dt = \int \left(a^2 - 2agt \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + g^2 t^2\right) dt,$$

wo die Grenzen 0 und $\dfrac{2a \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{g}$ sind.

Vertauscht man α mit $-\alpha$, so bleibt der Endpunkt der Bahn derselbe, und der Unterschied zwischen den beiden Integralen wird

$$\frac{4\sqrt{2}}{3g} a^3 \sin^3 \alpha,$$

ein Ausdruck, der, wenn α unendlich klein ist, unendlich klein von dritter Ordnung wird.

FÜNFTES KAPITEL.

Das Trägheitsmoment.

57. Unter dem Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Gerade oder Axe versteht man die Summe der Produkte aller Massenteile mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Geraden; man hat also, wenn r den Abstand und I das Trägheitsmoment bedeutet,

$$I = \int r^2 dm,$$

wo die Integration auf alle Massenteilchen des Körpers auszudehnen ist. Bedeutet M die ganze Masse, und setzt man

$$I = Mk^2,$$

so wird k eine Strecke, welche der Trägheitshalbmesser heifst. Wenn man von den Trägheitsmomenten von Flächen oder Linien spricht, so mufs das in ähnlicher Weise wie bei den Schwerpunkten aufgefafst werden.

Da wir das Trägheitsmoment im Folgenden oft benutzen werden, so wollen wir es hier genauer untersuchen, und namentlich feststellen, wie es sich für denselben Körper je nach Lage der Axe ändert.

Nehmen wir die Axe zur z-Axe, so haben wir

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm. \tag{1}$$

Denken wir uns die x-Axe durch den Schwerpunkt

gelegt, und ist dessen Abstand von der gegebenen Axe a, so erhalten wir, wenn wir

$$x = x_1 + a$$

setzen:

$$I = \int (x_1^2 + y^2)\, dm + 2a \int x_1\, dm + a^2 M.$$

Hierin bezeichnet das erste Integral das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die parallel zu der gegebenen durch den Schwerpunkt gelegt ist; bezeichnen wir dasselbe mit Mk^2 und beachten wir, das das zweite Integral wegen einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes gleich Null ist, so erhalten wir

$$I = M(k^2 + a^2), \tag{2}$$

oder in Worten:

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe findet man aus dem Trägheitsmoment in Bezug auf eine zu dieser parallele, durch den Schwerpunkt gehende Axe, indem man in dem Ausdruck für das letztere k^2 durch $k^2 + a^2$ ersetzt, worin a den Abstand der Axe vom Schwerpunkt bedeutet.

Für alle Erzeugenden eines geraden Kreiscylinders, dessen Axe den Schwerpunkt enthält, ist das Trägheitsmoment also von derselben Gröfse.

58. Nachdem wir also gesehen haben, wie das Trägheitsmoment sich bei einer Parallelverschiebung der Axe ändert, wollen wir nun den Zusammenhang untersuchen zwischen Trägheitsmomenten in Bezug auf Axen, die durch denselben Punkt gehen. Dieser Punkt sei der Anfangspunkt, und eine durch denselben gelegte Axe möge mit den Koordinatenaxen die Winkel α, β und γ bilden. Hat das Massenelement die Koordinaten x, y, z, so ergiebt sich:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$
$$= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Integriert man nun, nachdem man mit dm multipliciert hat, und setzt man

$$\int (y^2 + z^2)\, dm = A; \quad \int (z^2 + x^2)\, dm = B; \quad \int (x^2 + y^2)\, dm = C;$$
$$\int yz\,dm = D; \quad \int zx\,dm = E; \quad \int xy\,dm = F,^{*)} \tag{3}$$

so erhält man:

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$
$$- 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta, \tag{4}$$

wo A, B und C die Trägheitsmomente in Bezug auf die x-, y- und z-Axe bedeuten.

Das gefundene Resultat nimmt eine besonders elegante Form an, wenn man auf jeder durch den gegebenen Punkt gehenden Geraden ein Stück abträgt, welches der Quadratwurzel aus dem entsprechenden Trägheitsmoment umgekehrt proportional ist. Ist (x, y, z) der dadurch bestimmte Punkt, so hat man:

$$\cos \alpha = x \sqrt{I}; \quad \cos \beta = y \sqrt{I}; \quad \cos \gamma = z \sqrt{I}, \tag{5}$$

so dafs der geometrische Ort des Punktes die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1$$

erhält; diese Gleichung gehört einem Ellipsoid an, welches von Poinsot das zum Punkte gehörende Centralellipsoid genannt worden ist, während die Axen desselben die zum Punkte gehörenden Hauptaxen der Trägheit heifsen. Wählt man diese zu Koordinatenaxen, so nimmt die Gleichung des Ellipsoids (da das

---

*) Rankine hat die letzten drei Integrale Deviationsmomente genannt.

Ellipsoid unabhängig von der Lage des Koordinatensystems ist) die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad (6)$$

an, und wir wollen deshalb im Folgenden unter A, B und C die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen verstehen. Sind diese die Koordinatenaxen, so hat man:

$$\int yzdm = 0; \quad \int zxdm = 0; \quad \int xydm = 0, \qquad (7)$$

während auf ähnliche Weise die Form der Gleichung zeigt, dafs zwei von diesen Gleichungen gelten, wenn eine von den Hauptaxen mit einer von den Koordinatenaxen zuzammenfällt, so dafs man, wenn die x-Axe beispielsweise Hauptaxe ist, haben mufs:

$$\int zxdm = 0; \quad \int xydm = 0.$$

59. Wir wollen untersuchen, ob es im Körper einen Punkt giebt, dessen Centralellipsoid eine Kugel ist, so dafs alle durch den Punkt gehenden Geraden Hauptaxen sind, deren Trägheitsmomente gleich grofs sind. Wir wählen die Hauptaxen des Schwerpunktes zu Koordinatenaxen und nehmen an, dafs (a, b, c) der gesuchte Punkt sei. Legen wir durch diesen neue Axen, welche den ursprünglichen parallel sind, so kann man diese als die Hauptaxen des Punktes betrachten; dann mufs man haben, wenn die neuen Koordinanten x_1, y_1, z_1 sind,

$$\int y_1 z_1 dm = 0; \quad \int z_1 x_1 dm = 0; \quad \int x_1 y_1 dm = 0,$$

oder

$$\int (y-b)(z-c)\,dm = \int yzdm - b\int zdm - c\int ydm + bcM = 0$$

und die analogen. In diesen Gleichungen verschwindet das erste Integral, da die durch den Schwerpunkt gehenden Axen Hauptaxen sind, und die beiden übrigen verschwinden, weil der Schwerpunkt Anfangspunkt ist; man

hat also

$$bc = 0; \quad ac = 0; \quad ba = 0,$$

woraus hervorgeht, dafs zwei von den Gröfsen a, b, c Null sein müssen. Der gesuchte Punkt mufs also auf einer der Hauptaxen des Schwerpunktes liegen. Diese sei die z-Axe, so dafs $a = b = 0$ ist.

Sind A, B, C die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen des Schwerpunktes, so erhält man als Trägheitsmomente in Bezug auf die neuen Axen

$$A + Mc^2; \quad B + Mc^2; \quad C.$$

Da diese gleich grofs sein sollen, so mufs A gleich B sein, und dann findet man

$$c = \pm \sqrt{\frac{C - A}{M}}. \tag{8}$$

Wir sehen also, dafs ein Punkt wie der gesuchte nur existiert, wenn das Centralellipsoid des Schwerpunktes ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid ist, und dafs es, wenn dies der Fall ist, zwei vom Schwerpunkt gleich weit entfernte Punkte auf der kleinsten Axe giebt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen.

Der geführte Beweis zeigt zugleich, dafs die Hauptaxen jedes Punktes, der auf einer der Hauptaxen des Schwerpunktes liegt, den Hauptaxen des Schwerpunktes parallel sind.

60. Da nur die Form und nicht die Gröfse des Ellipsoids von Bedeutung ist, so können wir der Gleichung für das Centralellipsoid des Schwerpunktes die Form

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \tag{9}$$

geben, wo a, b und c die den Hauptaxen entsprechenden Trägheitshalbmesser sind. Von dieser Gleichung läfst sich der Übergang zu der des Centralellipsoids für einen beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1) bewerkstelligen, wenn man

diesen Punkt zum Anfangspunkt nimmt und die Richtung der Axen beibehält. Zu a^2 hat man dann $y_1^2+z_1^2$, das Quadrat des Abstandes zwischen der neuen und der alten x-Axe, zu addieren, und analoge Ausdrücke erhält man für die Koefficienten von y^2 und z^2. Ferner ist ((3))

$$D = \int (y-y_1)(z-z_1)\,dm = y_1 z_1 M,$$

da die übrigen Glieder, wie oben gezeigt, fortfallen. Die Gleichung wird also:

$$\left.\begin{array}{r}(a^2+y_1^2+z_1^2)\,x^2+(b^2+z_1^2+x_1^2)\,y^2+(c^2+x_1^2+y_1^2)\,z^2 \\ -2y_1z_1yz-2z_1x_1zx-2x_1y_1xy=1.\end{array}\right\} \quad (10)$$

Mittels bekannter Formeln bestimmt man die Richtungscosinus α, β, γ für die Axen dieses Ellipsoids durch die Gleichungen

$$(a^2+y_1^2+z_1^2-s)\,\alpha - x_1y_1\beta - x_1z_1\gamma = 0;$$
$$-x_1y_1\alpha + (b^2+z_1^2+x_1^2-s)\,\beta - y_1z_1\gamma = 0;$$
$$-x_1z_1\alpha - y_1z_1\beta + (c^2+x_1^2+y_1^2-s) = 0,$$

wo s eine von den Wurzeln der bekannten, bei der Transformation der Gleichung auftretenden kubischen Gleichung ist, welche bei der Elimination von α, β, γ entsteht.

Ist ρ der Abstand des Schwerpunktes vom Punkte (x_1, y_1, z_1), so kann man die drei Gleichungen schreiben:

$$(a^2+\rho^2-s)\,\alpha - x_1\,(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) = 0,$$
$$(b^2+\rho^2-s)\,\beta - y_1\,(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) = 0,$$
$$(c^2+\rho^2-s)\,\gamma - z_1\,(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) = 0.$$

Hierin setzen wir $\rho^2-s=k$, und erhalten dann

$$\frac{x_1}{a^2+k} = \frac{\alpha}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1},$$
$$\frac{y_1}{b^2+k} = \frac{\beta}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1},$$
$$\frac{z_1}{c^2+k} = \frac{\gamma}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1}.$$

Multipliciert man diese Gleichungen beziehungsweise mit x_1, y_1, z_1 und addiert sie, so erhält man die kubische Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2+k}+\frac{y_1^2}{b^2+k}+\frac{z_1^2}{c^2+k}=1;$$

diese bestimmt die drei Werte von k, welche den drei Werten von s entsprechen. Die gesuchten Richtungscosinus sind den Gröfsen

$$\frac{x_1}{a^2+k},\quad \frac{y_1}{b^2+k},\quad \frac{z_1}{c^2+k}$$

proportional.

Betrachten wir nun das System von konfokalen Flächen zweiter Ordnung:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1, \tag{11}$$

und suchen wir diejenigen von den Flächen des Systemes, welche den Punkt (x_1, y_1, z_1) enthalten, so erhalten wir für die Bestimmung von λ ganz dieselbe kubische Gleichung, welche wir oben für die Bestimmung von k erhielten; die Richtungscosinus der im Punkte (x_1, y_1, z_1) errichteten Normale sind proportional zu

$$\frac{x_1}{a^2+\lambda},\quad \frac{y_1}{b^2+\lambda},\quad \frac{z_1}{c^2+\lambda},$$

wo λ dieselben drei Werte hat, die k oben hatte. Mithin:

Die drei Hauptaxen für einen beliebigen Punkt fallen zusammen mit den drei Normalen auf den durch den Punkt gehenden drei konfokalen Flächen zweiter Ordnung, die zu dem durch (11) bestimmten System gehören.

Hierin liegt zugleich der Beweis dafür, dafs die drei Flächen sich orthogonal schneiden.

61. Nun wollen wir die Frage, ob jede Gerade Hauptaxe für einen oder mehrere ihrer Punkte ist, genauer untersuchen.

Wir wollen annehmen, dafs eine Gerade Hauptaxe für zwei von ihren Punkten ist; dann haben wir, wenn wir die Gerade zur z-Axe und einen von den beiden Punkten zum Anfangspunkt nehmen,

$$\int zxdm = 0; \quad \int yzdm = 0,$$

und zugleich, wenn c der Abstand der Punkte ist,

$$\int (z-c)\,xdm = 0; \quad \int (z-c)\,ydm = 0,$$

mithin

$$\int xdm = 0; \quad \int ydm = 0,$$

woraus hervorgeht, dafs die Gerade den Schwerpunkt enthalten mufs, und dafs c dann beliebig ist.

Aufser den Hauptaxen des Schwerpunktes giebt es also keine Geraden, welche für mehr als einen ihrer Punkte Hauptaxen sein können.

Man sieht leicht, dafs nicht jede Gerade Hauptaxe sein kann; die Normalen einer Fläche bilden nämlich ein doppelt unendliches Liniensystem, so dafs die Hauptaxen, welche aus allen Normalen des konfokalen Flächensystems bestehen, ein dreifach unendliches System oder einen Linienkomplex bilden. Um die Ordnung dieses Komplexes zu finden, suchen wir diejenigen Normalen, welche einen beliebigen Punkt (α, β, γ) enthalten. Dann erhalten wir:

$$\frac{\alpha - x}{\frac{x}{a^2+\lambda}} = \frac{\beta - y}{\frac{y}{b^2+\lambda}} = \frac{\gamma - z}{\frac{z}{c^2+\lambda}} = x(\alpha - x) + y(\beta - y) + z(\gamma - z),$$

oder

$$\frac{a^2+\lambda}{\frac{x}{\alpha - x}} = \frac{b^2+\lambda}{\frac{y}{\beta - y}} = \frac{c^2+\lambda}{\frac{z}{\gamma - z}}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{\frac{\alpha}{\alpha - x} - \frac{\beta}{\beta - y}} = \frac{b^2 - c^2}{\frac{\beta}{\beta - y} - \frac{\gamma}{\gamma - z}} = \frac{c^2 - a^2}{\frac{\gamma}{\gamma - z} - \frac{\alpha}{\alpha - x}},$$

woraus

$$(a^2 - b^2)\,\gamma\,(x - \alpha)\,(y - \beta) + (b^2 - c^2)\,\alpha\,(y - \beta)\,(z - \gamma)$$
$$+ (c^2 - a^2)\,\beta\,(z - \gamma)\,(x - \alpha) = 0;$$

diese Gleichung gehört einer Kegelfläche zweiter Ordnung an, die ihren Scheitelpunkt in dem gegebenen Punkte hat. Der Komplex ist deshalb von zweiter Ordnung. Sind zwei von den drei Trägheitshalbmessern gleich grofs, so zerfällt die Kegelfläche in zwei Ebenen.

Beispiel 1. Der Körper ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon von konstanter Dichtigkeit ρ und mit den Kanten $2a$, $2b$, $2c$.

Wir nehmen den Schwerpunkt zum Anfangspunkt und legen die Axen parallel den Kanten; das Centralellipsoid des Schwerpunktes mufs seine Axen auf den Koordinatenaxen haben; dann haben wir

$$A = \int (y^2 + z^2)\,dm = \rho \int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2a\rho \int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b} (y^2 + z^2)\,dy\,dz = 4ab\rho \int_{-c}^{+c} \left(\frac{b^2}{3} + z^2\right) zd$$

$$= \tfrac{8}{3}\,abc\rho\,(b^2 + c^2) = \tfrac{1}{3}\,M\,(b^2 + c^2).$$

Dadurch wird die Gleichung (4) für das Centralellipsoid

$$(b^2 + c^2)\,x^2 + (c^2 + a^2)\,y^2 + (a^2 + b^2)\,z^2 = 3.$$

Durch (2) findet man die Trägheitsmomente mit Bezug auf die Kanten:

$$\tfrac{4}{3}\,M\,(b^2 + c^2); \quad \tfrac{4}{3}\,M\,(c^2 + a^2); \quad \tfrac{4}{3}\,M\,(a^2 + b^2).$$

Beispiel 2. Trägheitsmoment einer homogenen Ellipse mit Bezug auf den Mittelpunkt (mit Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende und senkrecht auf der Ebene der Ellipse stehende Axe).

Wählt man Polarkoordinaten, so hat das Flächenelement $r dr d\theta$ das Trägheitsmoment $r^3 dr d\theta$; da nun

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

so wird das Trägheitsmoment bestimmt durch

$$I = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} r^4 d\theta.$$

Aus dem Ausdruck für die Fläche der Ellipse ergiebt sich ferner:

$$\frac{2\pi}{ab} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

Durch Differentiation nach a oder b wird hieraus abgeleitet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2} = \frac{\pi}{a^3 b}; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2} = \frac{\pi}{ab^3},$$

und hieraus durch Addition und Multiplikation mit $a^4 b^4$

$$\int_0^{2\pi} r^4 d\theta = \pi ab\,(a^2 + b^2),$$

mithin

$$I = \frac{\pi}{4} ab\,(a^2 + b^2).$$

Im besonderen erhält man für einen Kreis von Radius r

$$I = \frac{\pi}{2} r^4.$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse mit Bezug auf die grofse Axe wird bestimmt durch

$$A = 2\int_{-a}^{+a} dx \int_0^y y^2 dy = \tfrac{2}{3}\int_{-a}^{+a} y^3 dx;$$

setzt man

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi,$$

so wird hieraus:

$$A = \frac{4}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}ab^3.$$

Durch Vertauschung von a und b erhält man hieraus das Trägheitsmoment mit Bezug auf die kleine Axe. Die Summe der hier gefundenen beiden Trägheitsmomente liefert, wie zu erwarten war, das Trägheitsmoment mit Bezug auf den Mittelpunkt.

Beispiel 3. Trägheitsmoment eines Ellipsoids mit der Dichtigkeit 1 und den Halbaxen a, b, c.

Die Hauptträgheitsaxen für den Schwerpunkt müssen mit den Axen des Ellipsoids zusammenfallen; diese nehme man zu Koordinatenaxen. Ein Schnitt, senkrecht zur x-Axe, ist eine Ellipse mit den Halbaxen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

das Trägheitsmoment derselben mit Bezug auf die x-Axe ist nach der oben gefundenen Formel:

$$\frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2}(a^2-x^2)^2.$$

Multipliciert man hier mit dx und integriert von $-a$ bis $+a$, so ergiebt sich als Trägheitsmoment des Ellipsoids mit Bezug auf die x-Axe:

$$A = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2}\cdot\frac{16}{15}a^5 = \frac{1}{5}M(b^2+c^2);$$

durch Vertauschung der Halbaxen erhält man hieraus die beiden anderen Hauptträgheitsmomente.

Anwendungen.

1. Ein Körper dreht sich um eine feste Axe; wie läſst sich die Summe der Momente der Bewegungsgröſsen mit Bezug auf die Axe ausdrücken mittels des Trägheitsmomentes und der Winkelgeschwindigkeit?

2. Bestimme die Bewegung einer gewöhnlichen Winde (Rad an der Welle); die Radien sind r und r_1, die aufgehängten Massen m und m_1, während das Trägheitsmoment der Winde mit Bezug auf die Axe Mk^2 ist, wo M die Masse bedeutet. Bestimme ferner die Spannung der Seile; von der Reibung und dem Gewicht der Seile ist abzusehen.

3. Bestimme das Trägheitsmoment eines homogenen Stabes mit Bezug auf jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Höhe mit dem Stabe zusammenfällt. Die Länge des Stabes beträgt $2l$, seine Masse m.

4. Eine homogene dünne Scheibe hat die Form eines Dreiecks, dessen Seiten 3, 4 und 5 m lang sind; das Gewicht der Scheibe beträgt 100 kg. Man bestimme ihr Trägheitsmoment mit Bezug auf jede der Seiten und mit Bezug auf Axen, die senkrecht zur Ebene der Scheibe durch die Eckpunkte derselben gehen.

5. Bestimme das zum Schwerpunkt der obengenannten Scheibe gehörige Centralellipsoid.

6. Bestimme das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe mit Bezug auf eine Tangente.

7. Teile eine homogene dreieckige Scheibe mittels einer Geraden, welche der einen Seite parallel läuft, in zwei Teile, welche gleich groſse Trägheitsmomente mit Bezug auf die teilende Gerade haben.

8. Ein homogenes regelmäfsiges Tetraeder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Verbindungslinie der Mitten von zwei gegenüberliegenden Kanten. Bestimme die Momentensumme der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf die Axe.

9. Bestimme das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiskegels von der Höhe h, dem Radius r und der Masse m mit Bezug auf die Höhe und auf einen Durchmesser der Grundfläche. Bestimme ferner das Centralellipsoid des Schwerpunktes.

10. Eine homogene schwere Kugel vom Radius r und der Dichtigkeit ρ liegt oben auf einer anderen Kugel von derselben Dichtigkeit, aber doppelt so grofsem Radius, die sich um ihren festen Mittelpunkt drehen kann. Beide Kugeln sind vollkommen rauh. Bestimme ihre Bewegung, wenn die obere durch einen kleinen Stofs aus der Gleichgewichtslage gebracht wird.

11. Eine homogene kreisförmige Scheibe dreht sich um eine Tangente mit der Winkelgeschwindigkeit ω und aufserdem in ihrer eigenen Ebene um ihren Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Wie grofs ist die lebendige Kraft, wenn r der Radius und m die Masse ist?

12. Ein schwerer homogener Kreiscylinder liegt mit horizontaler Axe auf einer festen schiefen Ebene. Um die Mitte des Cylinders ist ein dünner Faden geschlungen, dessen eines Ende an einen festen Punkt, der von der schiefen Ebene eine Entfernung gleich dem Radius hat, geknüpft ist, während das andere Ende am Cylinder befestigt ist. Bestimme die Bewegung, wenn der Cylinder bei Beginn derselben den festen Punkt gerade berührt.

13. Ein Körper mit der Masse m rotiert um seinen Schwerpunkt. Die Projektionen der augenblicklichen Rotation auf die drei Hauptaxen des Schwerpunktes sind p, q und r, während a, b und c die Trägheitshalbmesser mit Bezug auf dieselben Axen sind. Wie grofs ist die lebendige Kraft des Körpers, und wie grofs das Moment des Kräftepaares, auf welches die statische Summe der Bewegungsgröfsen sich reducieren läfst?

14. Eine Schraube bewegt sich vermöge ihres Gewichtes abwärts in ihrer Mutter, die auf einem glatten Tische steht; in diesem befindet sich ein Loch, das der Schraube Durchgang gewährt. Bestimme die Bewegung der beiden Körper; von der Reibung ist abzusehen; die Trägheitsmomente mit Bezug auf die gemeinschaftliche Axe sind mk^2 und $m_1 k_1^2$.

15. Ein homogener Cylinder rotiert um seine feste horizontale Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω; das Trägheitsmoment mit Bezug auf die Axe ist mk^2. Ein senkrecht herabhängender homogener schwerer Faden, dessen Länge gleich dem Umfang des Cylinders und dessen Gewicht gleich $m_1 g$ ist, wird plötzlich mit seinem oberen Ende an einen Punkt des Cylindermantels befestigt, der sich in gleicher Höhe mit der Axe befindet. Wie grofs ist ω, wenn die Bewegung in dem Augenblick aufhört, wo der Faden um den Cylinder gewickelt ist? Von der Dicke des Fadens ist abzusehen.

Ist ω_1 die Winkelgeschwindigkeit nach dem durch die Befestigung des Fadens verursachten Stofse, so ergiebt der Satz von der Erhaltung der Momentensumme:

$$mk^2\omega = mk^2\omega_1 + m_1 a^2 \omega_1,$$

wo a den Radius bedeutet und $a^2 = 2k^2$ ist.

Dadurch erhält man:

$$\omega_1 = \frac{m\omega}{m + 2m_1}.$$

Nun ist die lebendige Kraft des Systems

$$\tfrac{1}{2} mk^2\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} m_1 a^2 \omega_1^2 = \tfrac{1}{2} k^2\omega^2 \frac{m^2}{m + 2m_1}.$$

Wenn die Bewegung aufhört, so ist die lebendige Kraft verbraucht und die ausgeführte Arbeit beträgt

$$m_1 g \,.\, \pi a;$$

mithin ergiebt das Princip der lebendigen Kraft:

$$\omega^2 = \frac{4\pi g m_1 (m + 2m_1)}{a m^2}.$$

16. Ein dünner homogener Ring vom Radius a und dem Gewicht $2\pi akg$ rollt innerhalb eines anderen festen Ringes vom Radius $2a$; die beiden Ringe befinden sich in derselben Vertikalebene und bei Beginn der Bewegung liegen ihre Mittelpunkte auf derselben horizontalen Geraden. Bestimme die Bewegung.

Wenn die Centrale um den Winkel θ gedreht ist, so hat der Ring sich um 2θ gedreht; die ausgeführte Arbeit ist $2\pi akg \,.\, a \sin\theta$; die Geschwindigkeit des Mittelpunktes ist $a\frac{d\theta}{dt}$, der eine Teil der lebendigen Kraft beträgt also $\pi ak \,.\, a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. Das Trägheitsmoment mit Bezug auf den Mittelpunkt ist $2\pi a^3 k$, mithin beträgt der zweite Teil der lebendigen Kraft

$$\pi a^3 k \,.\, 4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Die Bewegungsgleichung wird also

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{5a} \sin \theta.$$

17. Beweise, dafs die Summe der Trägheitsmomente eines Körpers mit Bezug auf drei auf einander senkrechte durch denselben Punkt gehende Axen konstant ist, und untersuche, wie diese Summe sich mit dem gegebenen Punkte ändert.

18. Welches ist der geometrische Ort für alle durch einen gegebenen Punkt gehenden Geraden, mit Bezug auf welche die Trägheitsmomente eines Körpers gleich grofs sind?

19. Wie bestimmt man ein homogenes Ellipsoid, das dieselbe Masse besitzt wie ein gegebener Körper, und für alle Axen dasselbe Trägheitsmoment hat wie dieser?

20. Eine begrenzte ebene Fläche hat eine Symmetrieaxe und mit Bezug auf diese einen Trägheitshalbmesser k. Die Fläche dreht sich um eine äufsere, in ihrer Ebene in der Entfernung d parallel zur Symmetrieaxe gezogene Axe und beschreibt dadurch einen homogenen Umdrehungskörper. Bestimme das Trägheitsmoment dieses Körpers mit Bezug auf die Umdrehungsaxe.

21. Zwei perspektivisch-ähnliche homogene Systeme haben das lineare Verhältnis v. Bestimme das Verhältnis zwischen ihren Trägheitsmomenten mit Bezug auf ähnlich liegende Axen. Die Systeme können 1, 2 oder 3 Dimensionen haben.

22. Vier materielle Punkte mit bekannten Massen sind in den Eckpunkten eines regelmäfsigen Tetraeders

ohne Masse angebracht. Bestimme das Centralellipsoid für den Schwerpunkt des Tetraeders.

23. Ein homogener Kreiscylinder liegt auf einem glatten Tische. In welchem Punkte des Cylinders mufs ein horizontal gerichteter Stofs angreifen, damit der Cylinder ins Rollen kommt ohne zu gleiten?

SECHSTES KAPITEL.

Der Stofs.

62. Wir haben erwähnt, dafs die Teilchen eines Systems ihren Bewegungszustand so verändern können, dafs die Veränderungen endlich sind, während die Zeit, in der sie vorgegangen sind, als verschwindend klein betrachtet werden kann. Solche Wirkungen nennen wir Stofswirkungen, und betrachten sie als durch instantane Kräfte oder Stofskräfte hervorgerufen; die Stöfse können zwischen den Teilchen des Systems stattfinden, oder sie können von aufsen kommen; im letzteren Falle können wir jedoch die stofsenden Teilchen als mit zum System gehörig betrachten, so dafs wir es nur mit inneren Stofskräften zu thun haben, und dann bringt, wie wir gezeigt haben, das Princip der Aktion und Reaktion es mit sich, dafs die statische Summe der Bewegungsgröfsen durch den Stofs nicht verändert werden kann.

63. D'Alemberts Princip läfst sich auf die Stofskräfte anwenden; betrachten wir nämlich die Gleichung

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

so wird diese sich, wenn die wirkenden Kräfte Stofskräfte sind, nach Multiplikation mit dt innerhalb des kleinen Intervalls, während dessen der Stofs dauert, integrieren lassen. Wir setzen nämlich voraus, dafs das Intervall so kurz ist, dafs die Koordinaten und deren zu den gegebenen Bedingungen stimmenden virtuellen Variationen nicht verändert werden, so dafs diese Variationen bei der Integration als Konstanten auftreten; bei der Integration erhalten wir dann Glieder von der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt,$$

wo $t_1 - t_0$ das kleine Zeitintervall ist; dieses Integral aber ist nach unserer Definition eben eine Komponente der auf das Teilchen wirkenden Stofskraft, denn es stellt den Zuwachs an Bewegungsgröfse dar, den die Komponente X einem freien Teilchen in der kleinen Zeit mitteilen würde; wir wollen diese Komponente mit X_1 bezeichnen. Ferner erhalten wir Glieder von der Form

$$m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 x}{dt^2} dt = m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^1,$$

wo das Resultat den Zuwachs bezeichnet, welchen die Komponente der wirklichen Bewegungsgröfse nach dem Stofse erfahren hat. Wir erhalten also

$$\Sigma \left[\left(X_1 - m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^1\right) \delta x \right.$$
$$\left. + \left(Y_1 - m \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^1\right) \delta y + \left(Z_1 - m \left(\frac{dz}{dt}\right)_0^1\right) \delta z\right] = 0, \quad (1)$$

in Worten: die Summe der virtuellen Momente der verlorenen Stofskräfte ist Null für jede,

den gegebenen Bedingungen nicht widerstreitende kleine Verschiebung.

64. Die Wirkung eines Stofses wird von der Natur der stofsenden Körper abhängig sein. Wir wollen namentlich zwei Grenzfälle betrachten: die elastischen und die unelastischen Körper. Unter elastischen Körpern wollen wir solche verstehen, in denen, wenn sie durch Druck oder Stofs eine gewisse Formveränderung erfahren haben, durch diese innere Spannungen hervorgerufen werden, welche bewirken, dafs die Körper ihre ursprüngliche Form anzunehmen versuchen und diese gerade in dem Augenblick erlangt haben, wo sie aufhören auf einander einzuwirken. Zugleich nehmen wir an, dafs wenn zwei beliebige Teilchen des Körpers während des Stofses auf einander wirken, dieses durch Kräfte geschieht, welche die Richtung der Verbindungslinie der Teilchen haben und eine Funktion des Abstandes derselben sind. Dann existiert, wie früher gezeigt, eine Kräftefunktion, und daraus folgt, dafs die gesamte lebendige Kraft jedesmal dieselbe ist, wenn die Lage der Körper dieselbe ist. Wir sehen also, dafs der Zusammenstofs zwischen vollkommen elastischen Körpern die gesamte lebendige Kraft nicht verändern kann. Während des ersten Teils der kleinen Zeit, in welcher die Stofskräfte wirken, führen diese eine positive Arbeit aus; aber danach vollführen sie eine ebenso grofse negative Arbeit, so dafs sie in Wirklichkeit, wenn sie nicht mehr wirken, keinerlei Arbeit ausgeführt, die lebendige Kraft also nicht verändert haben. Der innere Zustand der Körper ist verändert, während der Stofs dauert, aber nach dem Stofse ist er derselbe wie vor demselben.

Unter unelastischen Körpern verstehen wir solche, an denen die Stofskraft eine Arbeit ausführt, die sich in einer, nach Aufhören des Stofses andauernden Veränderung im Inneren des Körpers zeigt, einer Veränderung, deren äufseres Kennzeichen eine erhöhte Temperatur ist. Namentlich wollen wir annehmen, dafs vollkommen unelastische Körper, nachdem sie ihre gröfste Veränderung erfahren haben, nicht mehr auf einander wirken; dies tritt ein, wenn die Teilchen, die auf einander gewirkt haben, sich entweder gemeinschaftlich weiter bewegen oder Geschwindigkeiten erhalten haben, deren Projektionen auf die Richtung der Stofskraft gleich grofs sind. Das erste findet statt, wenn die Teilchen als vollkommen rauh betrachtet werden können, so dafs eine Bewegung in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Tangente unmöglich ist, während das zweite eintritt, wenn die Teilchen glatt sind, so dafs sie nur in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Normale auf einander wirken können.

65. Carnots Theorem. Carnot hat einen Ausdruck gegeben für den Verlust an lebendiger Kraft, der beim Zusammenstofse vollkommen unelastischer Systeme stattfindet. Diesen findet man, wenn man d'Alemberts Princip auf die verlorenen Bewegungsgröfsen anwendet. Dadurch erhält man

$$\Sigma m\left[(a-A)\,\delta x+(b-B)\,\delta y+(c-C)\,\delta z\right]=0,$$

wo a, b, c und A, B, C die Komponenten der Geschwindigkeit beziehlich vor und nach dem Stofse sind. Als virtuelle Verschiebungen können wir die im Zeitelement nach dem Stofse wirklich durchlaufenen Bahnelemente nehmen. Die unbekannten Stofskräfte sind nämlich paarweise gleich grofs und entgegengesetzt, und für jedes

Paar ist das virtuelle Moment gleich Null, da nach unserer Definition unelastischer Körper die beiden Angriffspunkte Geschwindigkeiten erhalten, welche gleich grofse Projektionen auf die Richtung der Stofskraft haben. Deshalb setzen wir

$$\delta x = A dt; \quad \delta y = B dt; \quad \delta z = C dt;$$

dadurch verwandelt die obige Gleichung sich in

$$\Sigma m \left[(a - A) A + (b - B) B + (c - C) C\right] = 0,$$

und diese läfst sich, wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 = v^2, \quad A^2 + B^2 + C^2 = V^2,$$

$$(a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2 = \omega^2$$

gesetzt wird, leicht auf die Form

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma m V^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m \omega^2 \qquad (2)$$

bringen.

Da nun $a - A$, $b - B$ und $c - C$ nichts anderes sind als die Komponenten der geometrischen Differenz $v - V$, so läfst sich der bewiesene Satz folgendermafsen ausdrücken:

Beim Zusammenstofse unelastischer Körper findet ein Verlust an lebendiger Kraft statt, und dieser Verlust ist genau gleich der lebendigen Kraft, welche dem geometrischen Geschwindigkeitsverlust entspricht.

Da der hier geführte Beweis sich nur darauf stützt, dafs das virtuelle Moment der verlorenen Kräfte Null ist für Verschiebungen, welche mit den wirklichen Bahnelementen, so wie diese nach dem Stofse werden, zusammenfallen, so läfst derselbe sich auch auf Fälle anwenden, in denen plötzlich neue Verbindungen zwischen den Teilchen auftreten, z. B. dadurch, dafs gewisse undehnbare Fäden durch die Bewegung plötzlich gestreckt werden.

Natürlich wird nicht bei allen plötzlichen Änderungen der Geschwindigkeit lebendige Kraft verloren. Eine innere Explosion wird z. B. in der Regel eine Vermehrung der lebendigen Kraft mit sich führen.

Als Beispiel wollen wir zwei Teilchen betrachten, welche beide die Masse 1 haben und deren Geschwindigkeiten, wenn sie in A zusammenstofsen, AB und AC sind. Wir denken uns die Teilchen rauh und unelastisch, so dafs sie nach dem Stofse eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit erhalten; diese wird dann AD, wenn D die Mitte von BC ist. Die verlorenen Geschwindigkeiten sind BD und CD, und die diesen entsprechende lebendige Kraft ist $\frac{1}{2}BD^2 + \frac{1}{2}CD^2$. Die lebendige Kraft vor dem Stofse war $\frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2$, während sie nach dem Stofse AD^2 ist. Carnots Satz ergiebt also

$$AB^2 + AC^2 - 2AD^2 = \frac{1}{2}BC^2,$$

was zu einem bekannten geometrischen Satze stimmt.

66. Stofs zwischen zwei unelastischen Körpern. Bewegen zwei Körper sich so, dafs ihre Schwerpunkte dieselbe Gerade durchlaufen, so mufs ihr gemeinsamer Schwerpunkt sich auch auf dieser Geraden bewegen; sind m und m_1 die Massen, v und v_1 die Geschwindigkeiten, während u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Gesamtmasse ist, so hat man

$$(m + m_1)u = mv + m_1v_1;$$

diese Gleichung genügt, um die Bewegung des Schwerpunktes nach dem Zusammenstofse zu bestimmen, falls die beiden Körper sich nach diesem vereinigt weiter bewegen; dann erhält man

$$u = \frac{mv + m_1v_1}{m + m_1}, \tag{3}$$

wodurch die Bewegung des Schwerpunktes der vereinigten Körper bestimmt wird. Die gefundene Formel läfst sich auch benutzen, wenn die Schwerpunkte sich nicht auf derselben Geraden bewegen, nur sind die Geschwindigkeiten dann geometrische Geschwindigkeiten und das Zeichen + im Dividenden bezeichnet geometrische Addition.

Um die Bewegung vollständig zu kennen, müssen wir auch die Rotation um den Schwerpunkt bestimmen. Wir setzen deshalb vor dem Stofse für jeden Körper die Bewegungsgröfsen der Teilchen zusammen zu einer Einzelkraft, welche im Schwerpunkt angreift, und zu einem Kräftepaare. Ebenso wie die Bewegung des Schwerpunktes nach dem Stofse bestimmt ist durch die Unveränderlichkeit der geometrischen Summe der beiden Einzelkräfte, ebenso wird die Rotation bestimmt durch die Unveränderlichkeit der geometrischen Summe der beiden Kräftepaare.

67. Sind die beiden zusammenstofsenden unelastischen Körper glatt, d. h. können sie nur auf einander in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale wirken, so werden sie sich in der Regel nach dem Stofse trennen. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, wo die stofsenden Körper keine Rotation besitzen und wo der Stofs central ist, das heifst, wo die gemeinschaftliche Normale durch die Schwerpunkte der Körper geht. Dann kann der Stofs keine Rotation hervorrufen, so dafs wir nur die Bewegung der Schwerpunkte nach dem Stofse zu betrachten brauchen.

Zerlegen wir die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte vor und nach dem Stofse nach der gemeinschaftlichen

Normale und senkrecht dazu, so müssen die letzteren Komponenten unverändert bleiben, da die entsprechenden Bewegungsgröfsen durch den Stofs nicht beeinflufst werden. Aus den normalen Komponenten vor dem Stofse findet man die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stofse durch (3). Man kennt also für beide Körper die beiden Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stofse und dadurch die Bewegung der Körper.

68. Zusammenstofs von zwei elastischen Körpern. Wir betrachten auch hier nur den Fall, wo die Körper glatt sind und der Stofs central ist in der oben gegebenen Bedeutung des Wortes. Da auch hier nur die normalen Komponenten der Bewegungsgröfsen vom Stofse beeinflufst werden, so können wir wie bei unelastischen Körpern verfahren, wenn wir erst gelernt haben, die normalen Geschwindigkeiten nach dem Stofse zu berechnen. Hierfür haben wir neben dem Satze von der Erhaltung der Bewegungsgröfsen zugleich den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Da die beiden Komponenten der Geschwindigkeit senkrecht auf einander stehen, so ist die lebendige Kraft die Summe von zwei anderen, nämlich von den beiden lebendigen Kräften, welche den beiden Komponenten der Geschwindigkeit entsprechen; da nun die eine von diesen durch den Stofs nicht verändert wird, so kann die entsprechende lebendige Kraft auch nicht verändert werden. Hieraus schliefsen wir, dafs der Teil der lebendigen Kraft, welcher den normalen Komponenten der Geschwindigkeiten entspricht, durch den Stofs unverändert bleiben mufs.

Sind also m_1 und m_2 die Massen, v_1 und v_2 die normalen Komponenten der Geschwindigkeiten vor dem

Stofse, V_1 und V_2 dieselben nach dem Stofse, so erhalten wir

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$
$$m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2;$$

daraus ergiebt sich

$$V_1 - V_2 = v_2 - v_1,$$

oder in Worten: der Unterschied der Geschwindigkeiten nach der Normale wechselt beim Stofse sein Vorzeichen.

Aus den gefundenen Gleichungen erhält man als Werte für die gesuchten Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \\ V_2 &= \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir wollen einige specielle Fälle betrachten. Dafs der eine Körper unbeweglich ist, läfst sich dadurch ausdrücken, dafs man $v_2 = 0$ und $m_2 = \infty$ setzt; dann findet man

$$V_2 = 0; \quad V_1 = -v_1,$$

woraus hervorgeht, dafs die normale Geschwindigkeit des stofsenden Körpers das Vorzeichen wechselt. In Verbindung mit dem Umstande, dafs die zweite Komponente der Geschwindigkeit unverändert bleibt, folgt hieraus der bekannte Satz von der Gleichheit des Einfalls- und Ausfallswinkels.

Sind die stofsenden Massen gleich grofs, so ergeben die Formeln

$$V_2 = v_1; \quad V_1 = v_2;$$

die Geschwindigkeiten werden also vertauscht.

69. Die Gleichungen für die normale Bewegung von zwei central zusammenstofsenden Massen nach dem Stofse lassen sich folgendermafsen schreiben:

$$\begin{aligned} m_1 V_1 + m_2 V_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ V_1 - V_2 &= e(v_2 - v_1); \end{aligned} \tag{5}$$

hierin setzt man für unelastische Körper $e = 0$, für elastische $e = 1$. Man hat gefunden, dafs e bei den Naturkörpern als Konstante betrachtet werden kann, die zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt und nur abhängig ist von dem Vermögen des Stoffes, gegen Formveränderungen zu reagieren; e heifst der Restitutionskoefficient oder die Elasticität.

Anwendungen.

1. Die Mittelpunkte von drei elastischen Kugeln liegen auf einer Geraden; die erste wird gegen die zweite mit gegebener Geschwindigkeit gestofsen; beweise, dafs die Masse der zweiten die mittlere Proportionale zwischen denen der beiden anderen sein mufs, wenn die Geschwindigkeit der dritten so grofs wie möglich werden soll.

2. Zwei Kugeln von der Elasticität e stofsen central zusammen; bestimme die lebendige Kraft, welche beim Stofse verloren geht.

3. n gleich grofse Kugeln liegen neben einander in gerader Linie auf einem glatten Tisch und sind zu je zweien durch undehnbare Fäden von der Länge a verbunden. Man giebt der ersten eine Geschwindigkeit v in der Richtung der Geraden; wie lange dauert es, bis die letzte in Bewegung gerät?

4. Drei gleich grofse elastische Kugeln liegen mit ihren Mittelpunkten auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks und werden gleichzeitig mit gleich grofsen Geschwindigkeiten gegen den Mittelpunkt des Dreiecks gestofsen. Bestimme die Bewegung derselben nach dem Stofse.

5. Zwei Massen werden wie bei Atwoods Fallmaschine in Bewegung gesetzt, nur fällt das (nicht elastische) Übergewicht von einer gegebenen Höhe herunter auf die eine Masse. Bestimme die Bewegung nach dem Stofse.

Man kann d'Alemberts Princip benutzen. Die Massen seien m, die Fadenlänge $x + x_1 = l$, die fallende Masse m_1 und ihre Geschwindigkeit im Moment des Auftreffens v; dann hat man

$$\left(mv - (m + m_1)\frac{dx}{dt}\right)\delta x - m\frac{dx_1}{dt}\delta x_1 = 0,$$

aber

$$\delta x + \delta x_1 = 0; \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dx}{dt};$$

mithin

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{mv}{2m + m_1},$$

ein Resultat, das man auch erhält, wenn man ausdrückt, dafs das Moment der verlorenen Bewegungsgröfsen mit Bezug auf die Axe gleich Null ist.

Die verlorene lebendige Kraft ist

$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 - \tfrac{1}{2}(2m + m_1) v_1^2,$$

und diese ist, in Übereinstimmung mit Carnots Satz, gleich der, den verlorenen Geschwindigkeiten entsprechenden, lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} m_1 (v - v_1)^2 + 2mv_1^2.$$

Da die verlorene Bewegungsgröfse auf die Rolle, die Unterlage, den Erdboden u. s. w., die man sich als eine zusammenhängende feste Masse denken mufs, übergegangen ist, so wird die Geschwindigkeit Null; die der hier verlorenen Geschwindigkeit entsprechende lebendige Kraft ist dann auch Null, denn die verlorene Bewegungsgröfse ist endlich.

6. Ein Teilchen bewegt sich auf einer Geraden mit der Geschwindigkeit v; dasselbe ist durch einen dünnen undehnbaren Faden von der Länge l mit einem festen Punkt verbunden, dessen Abstand von der Geraden $\frac{1}{2} l$ beträgt. Bestimme die Bewegung des Teilchens, nachdem der Faden gerade gespannt ist.

7. Eine Kugel stöfst gegen eine feste Ebene; bestimme die Relation zwischen Einfalls- und Ausfallswinkel, wenn dic Elasticitat e ist.

8. Eine elastische Kugel von der Masse m wird nahezu gleichzeitig von entgegengesetzten Seiten von zwei anderen elastischen Kugeln mit den Massen m_1 und m_2, und den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 gestofsen. Bestimme die Bewegung und untersuche, ob es gleichgültig ist, welcher der beiden Stöfse zuerst trifft.

9. Ein Billardball fällt hinunter auf einen anderen, der auf einem Tische liegt, und trifft denselben 60° von seinem höchsten Punkte. Bestimme die Bewegung gleich nach dem Stofse unter der Annahme, dafs Bälle und Tisch vollkommen elastisch sind.

10. Ein homogener Würfel gleitet eine glatte schiefe Ebene hinunter; die vordere horizontale Kante stöfst plötzlich auf ein kleines Hindernis, das sie festhält. Wie setzt die Bewegung sich fort?

11. Ein homogener Stab bewegt sich ohne Rotation in einer horizontalen Ebene und stöfst plötzlich gegen einen festen vertikalen Stab, von dem er in einem Abstände von dem einen Endpunkt getroffen wird, der gleich einem Viertel seiner ganzen Länge ist. Die Stäbe sind unelastisch und glatt. Bestimme die Bewegung.

12. Zwei Billardbälle berühren sich; wie mufs man den einen mit einem dritten Ball stofsen, um demselben eine Geschwindigkeit in einer gegebenen Richtung zu erteilen?

13. Wie läfst sich die S. 118 gelöste Aufgabe 29 mit Hülfe von d'Alemberts Princip lösen?

Die Effektivkräfte sind hier Bewegungsgröfsen, die sich für jeden Cylinder zu einem Kräftepaar zusammensetzen lassen, dessen Moment gleich dem Produkte aus dem Trägheitsmoment und der Winkelgeschwindigkeit ist. Die virtuellen möglichen Bewegungen sind die Drehungen $\delta\theta$ und $\delta\theta_1$. Nehmen wir die Rotation des ersten Cylinders als positiv, so haben wir

$$\frac{r^2}{2} M(\omega - \omega')\,\delta\theta - \frac{r_1^2}{2} M_1(\omega_1 - \omega_1')\,\delta\theta_1 = 0,$$

worin

$$r\delta\theta + r_1\delta\theta_1 = 0 \quad \text{und} \quad r\omega' = r_1\omega_1'.$$

Die numerischen Werte der Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stofse werden also bestimmt durch die Gleichungen:

$$rM(\omega - \omega') + r_1 M_1(\omega_1 - \omega_1') = 0; \quad r\omega' = r_1\omega_1'.$$

14. Eine Kugel von der Masse m und der Geschwindigkeit u trifft einen Balken unter einem rechten Winkel in einer Entfernung a vom Schwerpunkt des Balkens. Das Trägheitsmoment des Balkens in Bezug auf den

Schwerpunkt ist Mk^2. Wie ist die Bewegung gleich nach dem Stofse, wenn die beiden Körper unelastisch sind?

Die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stofse sei u_1; dann ist die Stofskraft $m(u-u_1)$. Der Schwerpunkt des Balkens erhält eine Geschwindigkeit v, die bestimmt ist durch die Gleichung

$$Mv = m(u-u_1).$$

Die Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf den Schwerpunkt wird bestimmt durch

$$Mk^2\omega = m(u-u_1)a.$$

Ferner drückt die Gleichung

$$u_1 = v + a\omega$$

aus, dafs die beiden Körper nach dem Stofse sich gemeinschaftlich weiter bewegen. Aus diesen drei Gleichungen bestimmt man u_1, v und ω.

15. Zwei unelastische glatte Kugeln bewegen sich in derselben Ebene; ihre Mittelpunkte sind je an einen von zwei sich schneidenden Kreisen gebunden. Wie bewegen sie sich nach einem Zusammenstofs?

16. Ein Stab rotiert in einer Ebene um seinen einen Endpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω und stöfst dabei an eine Kugel. Bestimme die Bewegung gleich nach dem Stofs, wenn beide Körper vollkommen elastisch sind.

Die Kugel habe die Masse m und erhalte die Geschwindigkeit v; dann ist die Stofskraft mv. Ist a der Abstand des gestofsenen Punktes vom festen Punkte, Mk^2 das Trägheitsmoment des Stabes in Bezug auf denselben Punkt, so erhält man, da die Momentensumme der Bewegungsgröfsen sich nicht verändert,

$$Mk^2(\omega_1 - \omega) + mva = 0,$$

wo ω_1 die Winkelgeschwindigkeit nach dem Stofse bedeutet.

Der feste Punkt läfst sich als ein freier Punkt von unendlich grofser Masse auffassen; somit erhält er nach dem Stofse die Geschwindigkeit Null, eine endliche Bewegungsgröfse und eine lebendige Kraft Null.

Dann ergiebt das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft:

$$Mk^2(\omega^2 - \omega_1^2) = mv^2.$$

SIEBENTES KAPITEL.

Bewegung eines Körpers mit einer festen Axe.

Beginn der Bewegung.

70. Wir wollen uns einen Körper, der um eine feste Axe drehbar ist, dadurch in Bewegung gesetzt denken, dafs ihm eine Bewegungsgröfse P mit einem gegebenen Angriffspunkt und einer gegebenen Richtung mitgeteilt wird. Durch Pp stellen wir dann das Moment der Bewegungsgröfse mit Bezug auf die feste Axe dar.

Nun suchen wir einen Ausdruck für die verlorenen Stofskräfte, die sich nach d'Alemberts Princip im Gleichgewicht halten; da das System eine feste Axe hat, reducieren die Gleichgewichtsbedingungen sich auf die eine, dafs die Summe der Momente der Kräfte mit Bezug auf die Axe Null ist (Statik, 66). Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir die Reaktion der Axe hinzufügen und den Körper als frei betrachten. Die statische Summe der Bewegungsgröfsen kann dann durch den Stofs nicht verändert werden, sondern die von der Reaktion der Axe herrührenden Bewegungsgröfsen haben mit Bezug auf die Axe die Momentensumme Null, so dafs sie in die Gleichung nicht aufgenommen werden.

Die durch den Stofs erlangte Winkelgeschwindigkeit sei ω. Ein Massenelement dm im Abstande r von der Axe erhält dann eine Bewegungsgröfse $r\omega dm$, und das Moment dieser mit Bezug auf die Axe ist $\omega r^2 dm$. Die Summe dieser Momente ist

$$\omega \int r^2 dm = \omega I,$$

wo I das Trägheitsmoment des Körpers mit Bezug auf die Axe bedeutet. Diese Momentensumme soll gleich dem Momente der mitgeteilten Bewegungsgröfse sein, so dafs man erhält:

$$\omega I = Pp \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{Pp}{I}, \tag{1}$$

wodurch die durch den Stofs hervorgerufene Winkelgeschwindigkeit bestimmt wird.

Denken wir uns, dafs der Stofs von einer Masse m mit der Geschwindigkeit v herrührt, welche den Körper trifft und sich nach dem Stofse als Teil von diesem bewegt, so können wir die Sache so auffassen, als ob m seine gesamte Bewegungsgröfse an den Körper abgegeben habe, wenn wir nach dem Stofse m mit zu den in Bewegung gesetzten Massenteilchen rechnen; hat m nach der Verbindung mit dem Körper einen Abstand ρ von der Axe, so erhalten wir

$$\omega = \frac{mvp}{I + m\rho^2}. \tag{2}$$

71. Der Stofs gegen die Axe. Um den Stofs gegen die Axe, der deren Reaktion entgegengesetzt ist, zu bestimmen, benutzen wir die übrigen fünf Gleichgewichtsbedingungen für die verlorenen Kräfte, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wir fügen die Reaktion hinzu und suchen die statische Summe der Bewegungsgröfsen vor und nach dem Stofse.

Um dies ausführen zu können, nehmen wir die Axe zur z-Axe und legen die xy-Ebene durch den Angriffspunkt $(a, b, 0)$ der Stofskraft, die xz-Ebene durch den Schwerpunkt.

X, Y, Z sind die Komponenten der Stofskraft.

Das Massenelement dm möge die Koordinaten x, y, z haben; dann setzen wir

$$x = r\cos\theta\,; \quad y = r\sin\theta\,,$$

woraus

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -y\omega\,; \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = x\omega\,,$$

während, da die Bewegung eine Drehung um die z-Axe ist,

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Die Bewegungsgröfse von dm hat also die Komponenten

$$-y\,\omega\,dm\,; \quad x\,\omega\,dm\,; \quad 0,$$

deren Summen, für den ganzen Körper genommen,

$$0; \quad x_1 M\omega; \quad 0$$

sind, wo M die Gesamtmasse bedeutet, während x_1 die eine Koordinate des Schwerpunktes ist; die andere Koordinate y_1 ist, entsprechend der Wahl des Koordinatensystems, gleich Null.

Da die gefundenen Komponenten aus denen des Stofses und denen der Reaktion zusammengesetzt sind, so erhalten wir für die letzteren mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen:

$$X, \quad Y - x_1 M\omega, \quad Z\,;$$

diese geben die Projektionen der Stöfse, welche die Axe erhält, auf die Koordinatenaxen an. Doch lassen diese Stöfse sich in der Regel nicht zu einer einzigen Stofskraft zusammensetzen, sondern zu einer solchen und einem Kräftepaar. Das letztere wird auf ähnliche Weise be-

stimmt, indem man von den Momenten der mitgeteilten Bewegungsgröfsen,

$$bZ, \quad -aZ, \quad aY - bX$$

die Momentensummen der Bewegungsgröfsen nach dem Stofse,

$$-\omega \int xzdm; \quad -\omega \int yzdm; \quad \omega \int (x^2 + y^2)\, dm,$$

subtrahiert; dadurch erhält man

$$bZ + \omega \int xzdm; \quad -aZ + \omega \int yzdm; \quad aY - bX - \omega I;$$

der letzte von diesen Ausdrücken verschwindet, denn eben dadurch, dafs man ihn gleich Null setzt, bestimmt man ω. Der Stofs wirkt also wie eine Einzelkraft und ein Kräftepaar; diese lafsen sich, wenn die Axe durch zwei feste Punkte ersetzt wird, in zwei auf diese Punkte wirkende Stöfse transformieren; jedoch sind die Komponenten nach der Axe unbestimmt, wenn sie auch eine bestimmte Summe haben (Statik, 66).

72. Wenn die Axe keinen Stofs erleiden soll, so müssen die fünf gefundenen Komponenten jede für sich gleich Null sein; man mufs also haben:

$$X = 0; \quad Z = 0; \quad Y = x_1 M\omega;$$

$$\int xzdm = 0; \quad \int yzdm = 0; \quad \omega I = aY.$$

Zwei von diesen Gleichungen zeigen, dafs die Axe eine Hauptaxe für den Anfangspunkt, das heifst für die Projektion des Angriffspunktes auf die feste Axe sein mufs; die beiden ersten Gleichungen zeigen, dafs der Stofs senkrecht zu der Ebene gerichtet sein mufs, welche die Axe und den Schwerpunkt enthält; aus der dritten ergiebt sich in Verbindung mit der letzten:

$$I = ax_1 M;$$

ist nun k der Trägheitshalbmesser für eine Axe, welche

parallel der festen Axe durch den Schwerpunkt geht, so ist

$$I = M(k^2 + x_1^2);$$

die gesuchte Bedingung ist also

$$a = x_1 + \frac{k^2}{x_1}. \tag{3}$$

Ist die Axe gegeben und soll der Stofs bestimmt werden, so mufs man zuerst einen Punkt der Axe bebestimmen, für den dieselbe Hauptaxe ist, falls es einen solchen giebt (61); eine durch diesen Punkt senkrecht zur Axe gelegte Ebene enthält die Stofskraft, die senkrecht auf einer durch den Schwerpunkt und die Axe gelegten Ebene steht und diese in einem Punkte schneidet, welcher Mittelpunkt des Stofses heifst; seine Entfernung von der Axe wird durch (3) bestimmt. Ist der Körper in Bewegung, so kann er durch einen Stofs, der den Mittelpunkt des Stofses trifft, zur Ruhe gebracht werden, ohne dafs die Axe einen Stofs erhält.

Erhält die Axe keinen Stofs, so würde sie fehlen können, ohne dafs der Beginn der Bewegung dadurch verändert würde. Ist die Axe eine Hauptaxe und $Z = 0$, so wird der Stofs auf eine Einzelkraft reduciert, welche im Anfangspunkte angreift, so dafs die Axe fehlen kann, wenn nur dieser Punkt fest ist. Gehört die Axe nicht zu dem in 61 bestimmten Linienkomplex, so giebt es keinen Mittelpunkt des Stofses.

Fortsetzung der Bewegung.

73. Bei der fortgesetzten Bewegung bestimmen wir nun die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit im Zeitelemente ganz ebenso, wie wir oben die durch den Stofs

hervorgerufene Winkelgeschwindigkeit bestimmten. Das Massenelement dm erhält eine Zunahme an Bewegungsgröfse, welche gleich $r\,dm\,d\omega$ ist, und deren Moment mit Bezug auf die Axe $r^2\,dm\,d\omega$ beträgt; dadurch erhält man

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma Pp}{I}, \tag{4}$$

wo ΣPp die Summe der Momente der bewegenden Kräfte mit Bezug auf die Axe bezeichnet. Sind die Kräfte Funktionen von θ, so dafs

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varphi(\theta), \tag{5}$$

so erhalten wir durch Multiplikation mit $2d\theta$ und Integration:

$$I(\omega^2 - \omega_0^2) = 2\int_{\theta_0}^{\theta}\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{6}$$

wo ω_0 die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, welche θ_0 entspricht. Man sieht leicht, dafs man diese Gleichung mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft erhalten kann; den auf der linken Seite hat man den doppelten Zuwachs an lebendiger Kraft, während das Integral die ausgeführte Arbeit bestimmt.

74. Das physische Pendel. Wirken keine anderen Kräfte als die Schwere, und ist die Axe horizontal, so haben wir das sogenannte physische oder zusammengesetzte Pendel. Wir werden sehen, dafs seine Bewegung dieselbe ist wie die, welche wir früher für das mathematische oder einfache Pendel gefunden haben.

Es sei k der Trägheitshalbmesser für eine durch den Schwerpunkt gehende und der Umdrehungsaxe parallele Axe, während der Abstand der beiden Axen a betragen möge. Dann hat man

$$I = M(k^2 + a^2).$$

Eine durch die Axe und den Schwerpunkt gelegte Ebene beschreibt den Winkel θ, den wir von der vertikalen Lage der Ebene aus rechnen wollen; ferner ist

$$\Sigma Pp = Mga \sin\theta\,;$$

die Bewegungsgleichung ist also:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ga}{a^2+k^2}\sin\theta. \tag{7}$$

Die Gleichung für die Bewegung des einfachen Pendels haben wir früher gefunden, aber wir können sie auch aus der hier gefundenen Gleichung ableiten, wenn wir $k = 0$ und $a = l$ setzen, wo l die Pendellänge bedeutet; dadurch erhalten wir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin\theta. \tag{8}$$

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke ergiebt sich, dafs das physische Pendel wie ein einfaches von der Länge

$$l = a + \frac{k^2}{a} \tag{9}$$

schwingt; l heifst die reducierte Pendellänge. Die Punkte der durch die Axe und den Schwerpunkt bestimmten Ebene, deren Entfernung von der Axe gleich der reducierten Pendellänge ist, heifsen Schwingungsmittelpunkte. Zwischen diesen befindet sich, wie (3) zeigt, der der Axe entsprechende Mittelpunkt des Stofses, wenn ein solcher überhaupt existiert.

Aus (9) ist ersichtlich, dafs der Schwerpunkt zwischen der Umdrehungsaxe und der Geraden liegt, welche die Schwingungsmittelpunkte enthält; da seine Entfernungen von den beiden Geraden das konstante Produkt k^2 haben, so können die beiden Geraden vertauscht werden, so dafs die erstere der Ort für die Schwingungsmittelpunkte wird, wenn man die letztere zur Drehungs-

axe nimmt. Auf diese Eigenschaft gründet sich Katers Reversionspendel.

Finden die Schwingungen statt um eine nicht horizontale Axe, so hat man nur in den Formeln g mit seiner senkrecht zur Axe gerichteten Komponente zu vertauschen.

75. Druck auf die Axe während der Bewegung. Wir kehren nun zu der allgemeinen Aufgabe zurück, um den Druck auf die Axe während der Bewegung zu bestimmen. Diesen finden wir ebenso wie den Stofs bei Beginn der Bewegung, indem wir die äufseren Kräfte mit denjenigen Kräften, mit entgegensetztem Vorzeichen genommen, zusammensetzen, welche die Bewegung hervorrufen würden, wenn die einzelnen Teilchen frei wären. Auf das Element dm mit den Koordinaten x, y, z wirken also die Kräfte

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dm, \quad \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dm, \quad \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dm;$$

setzen wir jetzt

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{dt} = -y\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega,$$

so erhalten wir, wenn wir beachten, dafs z konstant ist, $\frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ und

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y.$$

Dadurch ergeben sich die Komponenten des Drucks nach den Axen:

$$\Sigma X dm + \frac{d\omega}{dt} y_1 M + \omega^2 x_1 M;$$

$$\Sigma Y dm - \frac{d\omega}{dt} x_1 M + \omega^2 y_1 M;$$

$$\Sigma Z dm,$$

und die Kräftepaare:

$$\Sigma(yZ - zY)\,dm + \frac{d\omega}{dt}\int xzdm - \omega^2\int yzdm;$$

$$\Sigma(zX - xZ)\,dm + \frac{d\omega}{dt}\int yzdm + \omega^2\int xzdm;$$

$$\Sigma(xY - yX)\,dm - \frac{d\omega}{dt}\int (x^2 + y^2)\,dm.$$

Das letzte Paar ist der Bewegungsgleichung zufolge gleich Null.

76. Permanente Drehungsaxen. Wenn nur der Anfangspunkt fest ist und keine äufseren Kräfte wirken, so wird die Bewegung sich um die z-Axe fortsetzen, als ob diese eine feste Axe wäre, wenn die beiden Kräftepaare Null sind, d. h. wenn die z-Axe eine von den Hauptträgheitsaxen des festen Punktes ist; die Bewegungsgleichung zeigt, dafs die Winkelgeschwindigkeit konstant ist. Die Hauptaxen des Punktes heifsen wegen dieser Eigenschaft auch die permanenten Drehungsaxen desselben. Soll der feste Punkt auch entbehrt werden können, so müssen auch die Komponenten des Drucks nach den Axen Null sein; daraus ergiebt sich

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0;$$

der Punkt ist also der Schwerpunkt. Mithin:

Beginnt die Bewegung eines freien Körpers als eine Drehung um eine der Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes, so setzt die Bewegung sich, wenn keine äufseren Kräfte wirken, um dieselbe Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit fort.

Die Hauptaxen des Schwerpunktes heifsen deshalb auch die natürlichen Drehungsaxen.

Anwendungen.

1. Bestimme für ein physisches Pendel alle diejenigen Axen, welche für kleine Schwingungen dieselbe Schwingungszeit haben.

2. Bestimme diejenige Axe eines physischen Pendels, für welche die Schwingungszeit für kleine Schwingungen so klein wie möglich ist.

3. Ein schwerer Stab, der als eine Linie betrachtet werden kann, schwingt um eine horizontale durch den einen Endpunkt gehende Axe. Seine Länge ist $3a$, sein Gewicht mg, und seine Dichtigkeit ist der Entfernung vom Aufhängungspunkt proportional. Bestimme die reducierte Pendellänge und den Druck auf die Axe.

4. Ein homogener Stab schwingt um seinen einen Endpunkt in einer vertikalen Ebene. Wie mufs ein Affe, der auf dem Stabe klettert, sich auf diesem bewegen, damit die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt?

5. Eine homogene Kugel schwingt um eine feste äufsere Axe, weil sie von einem festen Punkte, der in einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden und senkrecht auf der Axe stehenden Ebene liegt, nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird. Wie bestimmt man die Bewegung?

6. Zwei gleich lange schwere Stäbe sind an ihrem einen Ende durch ein Scharnier verbunden, an dem anderen durch einen dünnen undehnbaren Faden. Das System, welches ein gleichseitiges Dreieck bildet, rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste senk-

rechte Axe, die mit der Höhe des Dreiecks zusammenfällt. Wie bestimmt man die Spannung des Fadens?

7. Wo hat man einen kleinen Körper von gegebener Masse auf der Geraden, welche den Aufhängungspunkt eines Pendels mit dem Schwerpunkt verbindet, anzubringen, um die reducierte Pendellänge so viel wie möglich zu verkleinern?

8. Ein homogener Umdrehungskörper rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine freie Axe, welche durch den Schwerpunkt geht und mit der Axe des Körpers den Winkel θ bildet; man bestimme die Kräfte.

Wenn die Axe fest wäre und keine äufseren Kräfte wirkten, so würde die Winkelgeschwindigkeit konstant sein; man findet deshalb die gesuchten Kräfte, wenn man die Reaktion der festen Axe bestimmt. Nimmt man den Schwerpunkt zum Anfangspunkt, die Drehungsaxe zur z-Axe, so zeigen die in 75 gefundenen Formeln, dafs die Reaktion auf ein Kräftepaar reduciert wird, dessen Komponenten nach der x- und y-Axe

$$\omega^2 \int yzdm; \quad -\omega^2 \int xzdm$$

sind.

Da dieses Kräftepaar der Drehung folgen mufs, so können wir uns damit begnügen, dasselbe für eine besondere Lage zu bestimmen. Wir nehmen deshalb an, dafs die Axe des Umdrehungskörpers in der xz-Ebene liegt; wegen der Symmetrie wird dann das erste Integral gleich Null. Drehen wir das Koordinatensystem, so dafs die Axe des Körpers die neue z-Axe wird, so erhalten wir

$$\begin{aligned} xz &= (x_1 \cos\theta - z_1 \sin\theta)(x_1 \sin\theta + z_1 \cos\theta) \\ &= (x_1^2 - z_1^2) \sin\theta \cos\theta + x_1 z_1 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Integrieren wir nach Multiplikation mit dm, so fällt das letzte Integral wegen der Symmetrie fort, und wir erhalten für das gesuchte Kräftepaar

$$K = (A - C)\,\omega^2 \sin\theta \cos\theta,$$

wo A und C zwei Hauptträgheitsmomente des Umdrehungskörpers sind.

ACHTES KAPITEL.

Bewegung eines einzelnen Körpers.

Beginn der Bewegung.

77. Der freie Körper. Wir wollen uns einen Körper von der Masse m in einem beliebigen Bewegungszustande denken und die instantanen Kräfte suchen, welche den Körper aus der Ruhe in diesen Zustand würden bringen können; diese Kräfte sind die statische Summe aus den Bewegungsgröfsen der Massenteilchen.

Die Elementarbewegung des Körpers läfst sich aus einer Translation und einer Rotation, deren Axe den Schwerpunkt enthält, zusammensetzen. Die gesuchten Kräfte sind nun die statische Summe derjenigen Kräfte, welche die zusammensetzenden Bewegungen einzeln hervorrufen können (Grundsatz I).

Bei der Translation haben alle Massenteilchen eine gemeinsame Geschwindigkeit u. Das Massenelement dm hat die Bewegungsgröfse udm, und die statische Summe aller Bewegungsgröfsen ist eine Bewegungsgröfse mu, welche im Schwerpunkt angreift und die Richtung der Translation besitzt. Also:

Eine Kraft, welche einem Körper eine Translation u erteilen soll, mufs im Schwer-

punkte angreifen, die Richtung der Translation und die Gröfse mu besitzen.

78. Um die Kräfte zu finden, welche die Rotation ω hervorbringen können, nehmen wir den Schwerpunkt zum Anfangspunkt und die Rotationsaxe zur z-Axe, indem wir die positive Richtung dieser so wählen, dafs ω positiv wird. Die Bewegungsgröfse des Massenelements hat folgende Komponenten nach den Axen:

$$-\omega y dm; \quad \omega x dm; \quad 0.$$

Durch Verlegung an den Anfangspunkt und Summation erhalten wir eine Einzelkraft mit den Komponenten

$$-\omega \int y dm; \quad \omega \int x dm; \quad 0, \tag{1}$$

und ein Kräftepaar mit den Komponenten

$$-\omega \int xz dm; \quad -\omega \int yz dm; \quad \omega \int (x^2 + y^2) dm. \tag{2}$$

Die Einzelkraft fällt fort, da der Schwerpunkt Anfangspunkt ist; die Kräftepaare setzen wir so zusammen, dafs wir zwei erhalten, nämlich, wenn I dafs Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Axe bedeutet,

$$H = \omega I \tag{3}$$

mit der Axe auf der z-Axe, und

$$K = \omega \sqrt{\left(\int xz dm\right)^2 + \left(\int yz dm\right)^2} \tag{4}$$

mit der Axe in der xy-Ebene. Diese beiden lassen sich wieder zu dem resultierenden Kräftepaar

$$G = \sqrt{H^2 + K^2} \tag{5}$$

zusammensetzen, welches mit ω den Winkel φ bildet, der bestimmt ist durch

$$\cos\varphi = \frac{H}{G} \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = \frac{K}{G}. \tag{6}$$

Da H positiv ist, so ist φ immer ein spitzer Winkel; derselbe wird nur Null für $K = 0$, also wenn die

Rotationsaxe eine von den Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes ist. Also:

Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe wird von einem Kräftepaar hervorgerufen, dessen Axe im allgemeinen einen spitzen Winkel mit der Rotation bildet und nur mit dieser zusammenfällt, wenn die Rotationsaxe eine von den Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes ist. Ist dies der Fall, so findet man die Winkelgeschwindigkeit, wenn man das Moment des Kräftepaares durch das Trägheitsmoment dividiert.

79. Um die augenblickliche Axe zu finden, wenn das Kräftepaar gegeben ist, zerlegen wir dieses nach den drei Hauptaxen. Die Komponenten seien

$$L, \quad M, \quad N.$$

Wenn diese einzeln wirkten, so würden sie, wenn A, B und C die Trägheitsmomente sind, die Rotationen

$$p = \frac{L}{A}; \quad q = \frac{M}{B}; \quad r = \frac{N}{C} \tag{7}$$

hervorrufen, welche dieselben Richtungen wie die entsprechenden Kräftepaare haben. Da man nun bei der Zusammensetzung von Rotationen in Wirklichkeit die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte zusammensetzt, so mufs nach unserem ersten Grundsatz das Kräftepaar G mit den Komponenten L, M, N eben die Rotation ω mit den Komponenten p, q, r hervorbringen. Der Winkel zwischen ω und G wird bestimmt durch

$$\cos\varphi = \frac{Lp + Mq + Nr}{\omega G} = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\omega G}. \tag{8}$$

Der Dividend des letzten Quotienten ist gerade das Doppelte von der lebendigen Kraft des Körpers; man

hat nämlich, wenn die augenblickliche Axe die Winkel α, β, γ mit den Hauptaxen bildet,

$$p = \omega \cos\alpha; \quad q = \omega \cos\beta; \quad r = \omega \cos\gamma;$$

der Dividend wird also

$$(A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma)\,\omega^2 = I\omega^2,$$

und dies ist gerade das Doppelte der lebendigen Kraft, die wir mit Q bezeichnen wollen; Q kann man auch folgende Form geben:

$$Q = \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}. \tag{9}$$

80. Poinsot hat eine elegante geometrische Bestimmung der augenblicklichen Axe gegeben, indem er gezeigt hat, dafs dieselbe im Centralellipsoid konjugierter Durchmesser zu der Ebene des Kräftepaares ist.

Sind die Hauptaxen die Koordinatenaxen, so hat das Centralellipsoid die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Die Berührungsebene mit dem Berührungspunkt (x_1, y_1, z_1) hat die Gleichung

$$Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 = 1;$$

soll diese Ebene mit der des Kräftepaares zusammenfallen, deren Richtungscoss. den Gröfsen L, M, N oder Ap, Bq, Cr proportional sind, so mufs

$$\frac{p}{x_1} = \frac{q}{y_1} = \frac{r}{z_1}$$

sein, woraus hervorgeht, dafs die augenblickliche Axe mit dem an den Berührungspunkt gezogenen Radiusvektor zusammenfällt. Also:

Legt man die Ebene des Kräftepaares als Berührungsebene an das Centralellipsoid, so ist der an den Berührungspunkt gezogene Durchmesser augenblickliche Drehungsaxe.

Für die Winkelgeschwindigkeit hat man

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\frac{L^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{N^2}{C^2}}. \quad (10)$$

Die Richtungscosinus der Berührungsebene sind

$$\frac{L}{G}, \frac{M}{G}, \frac{N}{G} \text{ oder } \frac{Ap}{G}, \frac{Bq}{G}, \frac{Cr}{G},$$

mithin ist ihre Entfernung vom Mittelpunkt

$$\rho \cos \varphi = h = \frac{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}{G} = \frac{\sqrt{Q}}{G}, \quad (11)$$

wo ρ den an den Berührungspunkt gezogenen Radiusvektor bedeutet. Hieraus erhält man durch Vergleichung mit (8):

$$\omega = \rho \sqrt{Q}. \quad (12)$$

Aus (10) ergiebt sich, dafs die Winkelgeschwindigkeit dem Kräftepaar proportional ist, so lange dieses seine Richtung behält, aus (11), dafs ein Kräftepaar von gegebener Gröfse die gröfste lebendige Kraft erzeugt, wenn h so grofs wie möglich ist, also wenn die Axe des Kräftepaares mit der gröfsten Axe des Ellipsoids zusammenfällt.

81. Der Körper hat einen festen Punkt. Nimmt man den festen Punkt zum Anfangspunkt, so wird die statische Summe der Bewegungsgröfsen wie bei dem freien Körper bestimmt; die Einzelkraft wird jedoch nicht Null, sondern

$$P = \omega m \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \omega m d, \quad (13)$$

wo x_1 und y_1 die Koordinaten des Schwerpunktes, und d seinen Abstand von der augenblicklichen Axe bedeuten. Diese Kraft bestimmt die Reaktion des festen Punktes beim Stofse; aus ihren Komponenten ersieht man, dafs eben sie es ist, welche dem Schwerpunkt seine Bewegung

geben würde, wenn derselbe die Gesamtmasse des Körpers enthielte, ein Resultat, welches zu dem Princip von der Bewegung des Schwerpunktes stimmt.

Wenn ein Körper einen festen Punkt hat, so wird das Gleichgewicht durch die drei Momentengleichungen (Statik, 65) bestimmt. Auf den Körper mufs deshalb, damit er die gegebene Rotation erhält, ein Kräftepaar wie das oben bestimmte wirken. Ist das Kräftepaar gegeben, so wird die Rotationsaxe und die Winkelgeschwindigkeit ganz wie beim freien Körper bestimmt, nur treten die Hauptaxen des festen Punktes mit den entsprechenden Trägheitsmomenten an Stelle derjenigen des Schwerpunktes. Das Resultat unserer Untersuchung ist also folgendes:

Wirken auf einen Körper mit einem festen Punkt in einem gewissen Augenblick gegebene Stofskräfte, so verlege man diese an den festen Punkt; dadurch erhält man eine Einzelkraft und ein Kräftepaar; das letztere bestimmt die Rotation nach den Formeln (7) oder nach dem Satz von Poinsot. Der Stofs gegen den festen Punkt ist die geometrische Differenz zwischen der Einzelkraft und P ((13)). Ist die Einzelkraft gleich P, so kann man den festen Punkt fortnehmen, ohne dafs die Rotation verändert wird.

Fortsetzung der Bewegung.

82. Da wir bei einem freien Körper die Bewegung des Schwerpunktes für sich, und ebenso die Bewegung des Körpers um den Schwerpunkt für sich betrachten können, so wollen wir nur die Bewegung eines Körpers

um einen festen Punkt untersuchen. Wir nehmen an, dafs der Körper durch ein instantanes Kräftepaar G die oben bestimmte Rotation ω empfangen habe, und wollen nun die Bewegung im nächsten Zeitelement untersuchen unter der Voraussetzung, dafs keine neuen Kräfte wirken.

Zuerst suchen wir die Bedingung dafür, dafs der Körper seine Rotation im nächsten Zeitelement behält. Ist dies der Fall, so mufs jedes Massenelement einen kleinen Kreisbogen mit der Geschwindigkeit ωr beschreiben, wo r der Radius des Kreises ist, das heifst der Abstand des Teilchens von der Rotationsaxe; dm mufs dann von einer Kraft $\omega^2 r\, dm$ beeinflufst werden, welche gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist. Wir fügen deshalb bei jedem Massenelement eine solche Kraft hinzu und die ebenso grofse, aber entgegengesetzte Centrifugalkraft, welche vom Mittelpunkt des Kreises aus gerichtet ist. Die Wirkung des ersten Systems besteht wie wir wissen darin, dafs die Rotation unverändert bleibt; die Wirkung des zweiten Systems (welches Poinsot die durch die Bewegung entwickelten Centrifugalkräfte nennt) finden wir, wenn wir die statische Summe der Kräfte und die von diesen in der Zeit dt hervorgerufene unendlich kleine Rotation suchen. Setzen wir diese mit der ursprünglichen Rotation zusammen, so finden wir nach unserem ersten dynamischen Grundsatz die wirkliche, im zweiten Zeitelement stattfindende Rotation.

Die Zusammensetzung der Centrifugalkräfte wird erleichtert, wenn man beachtet, dafs man eine der auf dm wirkenden Centrifugalkraft gleiche Kraft erhält, wenn man die Bewegungsgröfse dieses Elements mit ω multipliciert und um einen rechten Winkel in der der Rotation entgegengesetzten Richtung dreht. Durch die

Zusammensetzung erhält man also eine Einzelkraft ωP, die in der xy-Ebene liegt und gegen die Projektion des Schwerpunktes auf diese Ebene gerichtet ist. Ist der feste Punkt der Schwerpunkt, so wird diese Kraft Null; ist er nicht der Schwerpunkt, so bestimmt sie den Druck auf diesen.

Was das resultierende Kräftepaar betrifft, so wird die Komponente desselben nach der z-Axe Null, da alle Kräfte die Axe schneiden. Deshalb wird das Kräftepaar auf ein Kräftepaar ωK reduciert, das in der xy-Ebene liegt, dessen Richtung man findet, wenn man K um einen rechten Winkel in dem der Rotation entgegengesetzten Sinne dreht, und das deshalb in seiner Ebene in der Richtung $KG\omega$ dreht. Ist die Axe eine Hauptaxe, so ist K Null und die Rotation wird nicht verändert.

Das Kräftepaar ωK steht senkrecht auf K und auf der z-Axe, also auch auf G, das in der Ebene jener liegt. Die Ebene des Kräftepaares fällt deshalb zusammen mit der Ebene, welche von der Rotationsaxe und der Axe von G bestimmt wird. Die Gröfse des Kräftepaares beträgt ((6))

$$\omega K = \omega G \sin \varphi, \tag{14}$$

wo φ den Winkel zwischen G und ω bedeutet. Wir haben also den von Poinsot bewiesenen eleganten Satz:

Das durch die entwickelten Centrifugalkräfte bestimmte Kräftepaar wird der Gröfse und Lage nach durch das von ω und G als Seiten bestimmte Parallelogramm dargestellt.

Das Kräftepaar dreht, wie wir oben sahen, von G nach ω.

Nun wollen wir die Rotation bestimmen, welche dieses Kräftepaar in der Zeit dt hervorruft; wir suchen

deshalb die Komponenten desselben nach den Hauptaxen oder, wenn wir diese jetzt zu Koordinatenaxen nehmen, die Projektionen des Parallelogramms auf die Koordinatenebenen. Die positiven Richtungen der Axen wählen wir so, dafs ein Kräftepaar, welches von X nach Y dreht, eine Axe erhält, die nach Z gerichtet ist. Sind G und ω vom Anfangspunkte aus abgetragen, so erhalten ihre Endpunkte beziehungsweise die Koordinaten

$$L, M, N; \quad p, q, r,$$

und die Projektionen des Parallelogramms (die positiv sind, wenn der Winkel von der Projektivn von G bis zur Projektion von ω positiv ist) werden

$$Mr - Nq; \quad Np - Lr; \quad Lq - Mp,$$

oder

$$(B-C)qr; \quad (C-A)rp; \quad (A-B)qp.$$

Diese Kräftepaare erzeugen in der Zeit dt um die drei Axen die Rotationen

$$\frac{B-C}{A}qrdt; \quad \frac{C-A}{B}rpdt; \quad \frac{A-B}{C}qpdt.$$

Diese Rotationen sind die Zunahmen, welche p, q und r in der Zeit dt erfahren, also erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Wenn gleichzeitig ein äufseres Kräftepaar mit den Komponenten L_1, M_1, N_1 wirkt, so bringen diese in der Zeit dt die Rotationen

$$\frac{L_1}{A}dt; \quad \frac{M_1}{B}dt; \quad \frac{N_1}{C}dt$$

hervor, und man erhält dann die Eulerschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + L_1, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + M_1, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + N_1. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

83. Die gefundenen Gleichungen bestimmen p, q und r als Funktionen von t. Um nun die Lage des Körpers im Raume zu bestimmen, suchen wir die Winkel, welche die Hauptaxen mit den Axen eines willkürlich gewählten festen rechtwinkligen Systems bilden. Haben die Axen des letzteren die positiven Richtungen X, Y, Z, während X_1, Y_1, Z_1 die positiven Richtungen der Hauptaxen sind, so können wir, um die Lage dieser zu bestimmen, die drei von Euler angewandten Winkel

$$\theta = (ZZ_1); \quad \varphi = (NX_1); \quad \psi = (NX)$$

benutzen, worin N die positive Richtung der Durchschnittslinie zwischen den Ebenen $X_1\,Y_1$ und $X\,Y$ bedeutet. Eine Rotation des Körpers läfst sich dann in die drei Rotationen

$$\frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d\psi}{dt}$$

zerlegen, deren Axen beziehungsweise N, Z_1 und Z sind. Die Summe der Projektionen dieser Rotationen auf X_1 mufs p sein, so dafs

$$p = \frac{d\theta}{dt}\cos(NX_1) + \frac{d\varphi}{dt}\cos(Z_1X_1) + \frac{d\psi}{dt}\cos(ZX_1);$$

auf ähnliche Weise erhält man analoge Ausdrücke für q und r. Werden die in diesen Ausdrücken vorkommenden Winkel durch θ, φ und ψ ausgedrückt, so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= \cos\varphi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}; \\ q &= -\sin\varphi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}; \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

die zur Bestimmung der drei gesuchten Winkel dienen.

Besondere Untersuchung des Falles, wo keine äufseren Kräfte wirken.

84. Wir haben gesehen, dafs die bei der Bewegung entwickelten Centrifugalkräfte sich zusammensetzen lassen zu einer Einzelkraft, welche die Bewegung nicht beeinflufst, und einem Kräftepaar, das der Gröfse und Lage nach durch das von ω und G als Seiten bestimmte Parallelogramm dargestellt wird. Wir haben die Komponenten der von diesem Kräftepaar in der Zeit dt erzeugten unendlich kleinen Rotation gefunden, und aus den Ausdrücken für diese Komponenten ist ersichtlich, dafs die Rotation senkrecht auf G steht. Das läfst sich auch folgendermafsen erkennen: die Axe der Rotation ist der Ebene ωG konjugiert; da diese Ebene die Rotation ω enthält, welche der Ebene von G konjugiert ist, so mufs die Ebene von G den Durchmesser enthalten, welcher der Ebene ωG konjugiert ist; die Axe der unendlich kleinen Rotation liegt also in der Ebene von G und steht deshalb senkrecht auf der Axe von G.

Hieraus folgt, dafs die kleine Rotation durch ihre Zusammensetzung mit ω die Projektion von ω auf G nicht verändern kann, ein Resultat, dafs sich übrigens unmittelbar folgern läfst aus (8) in Verbindung mit den

Sätzen von der Erhaltung der lebendigen Kraft und von der Momentensumme der Kräfte in Bezug auf durch den festen Punkt gehende Axen. Mithin:

Die Projektion von ω auf G ist während der ganzen Bewegung konstant.

Da nun die Gleichung

$$\omega = \rho \sqrt{Q},$$

weil Q konstant ist, zeigt, dafs ω in einem konstanten Verhältnis zu dem an den Berührungspunkt gezogenen Radiusvektor steht, so dafs auch dessen Projektion auf G konstant ist, so läfst der Satz sich auch folgendermafsen ausdrücken:

Legt man die Ebene des Kräftepaares als Berührungsebene an das Centralellipsoid, so behält sie während der ganzen Bewegung konstante Entfernung von dem festen Punkt. Da die Ebene zugleich konstante Richtung hat, so bleibt sie während der ganzen Bewegung eine feste Ebene im Raume.

Wir erhalten also ein sehr übersichtliches Bild der Bewegung. Da diese in jedem Augenblick eine Rotation um den an den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser ist, so besteht sie darin, dafs das Centralellipsoid ohne zu gleiten auf der im Raume festen Berührungsebene rollt. Dadurch ist die Bewegung geometrisch bestimmt; betreffs der Winkelgeschwindigkeit ist oben nachgewiesen, dafs sie dem an den Berührungspunkt gezogenen Radiusvektor proportional ist.

Die successiven Berührungspunkte oder Pole bilden auf dem Ellipsoid diejenige Kurve, welche Poinsot Polodie genannt hat. Wir fanden früher (Kinematik,

42), dafs diese als Schnittkurve des Ellipsoids mit der Kegelfläche

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{p^2}\right)=0 \qquad (18)$$

entstand, wo a, b, c die Halbaxen bezeichneten, während p der konstante Abstand der Berührungsebene vom Mittelpunkt war; mit den hier benutzten Bezeichnungen verwandelt die Gleichung sich in

$$Ax^2(G^2-AQ)+By^2(G^2-BQ)+Cz^2(G^2-CQ)=0. \qquad (19)$$

Ist b der Gröfse nach die mittlere Halbaxe, so müssen a und c Grenzwerte für p sein, so dafs AQ und CQ Grenzwerte für G^2 werden. Hat G^2 einen von diesen Grenzwerten, so rotiert das Centralellipsoid um seine gröfste oder kleinste Axe.

85. **Ist das Centralellipsoid ein Umdrehungsellipsoid,** so liegen die Punkte, deren Berührungsebenen konstante Entfernung vom Mittelpunkte haben, auf zwei Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf der Figuraxe stehen. Der Berührungspunkt mufs auf dem einen von diesen Kreisen bleiben; er beschreibt auf der Berührungsebene einen zweiten Kreis, dessen Mittelpunkt die Projektion des Mittelpunktes der Ellipse ist.

Da ρ konstant ist, so ist ω auch konstant. Man sieht leicht, dafs die Figuraxe beständig in der Ebene ωG liegt und einen konstanten Winkel mit der festen Berührungsebene bildet. Die augenblicklichen Axen bilden im Körper einen Umdrehungskegel um die Axe des Centralellipsoids und im Raume einen zweiten Kreiskegel, dessen Axe senkrecht auf der Berührungsebene steht. Während der Bewegung rollt der erste von diesen

Kegeln ohne zu gleiten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem zweiten.

86. Ist der Abstand der Berührungsebene vom Mittelpunkt gleich der der Gröfse nach mittleren Halbaxe, ist also

$$G^2 = BQ,$$

so reduciert sich der Kegel auf zwei durch die mittlere Halbaxe gehende Ebenen; die Polodie zerfällt also in zwei Ellipsen, deren kleinste Axen mit der mittleren Axe des Ellipsoids zusammenfallen. Der Berührungspunkt bewegt sich, je nachdem die Rotation die eine oder die andere Umlaufsrichtung hat, auf den einen oder den anderen Endpunkt dieser Axe zu; später werden wir sehen, dafs er unendlich lange Zeit gebraucht, um den Endpunkt zu erreichen. Auf der Berührungsebene beschreibt der Berührungspunkt eine spiralförmige Kurve, welche sich der Projektion des Mittelpunktes asymptotisch nähert.

Wir können uns nun auch eine Vorstellung von der Bewegung im allgemeinen bilden. Zwei Polodien können sich nicht schneiden, da sonst die an einen Schnittpunkt gelegte Berührungsebene zwei verschiedene Abstände vom Mittelpunkte haben müfste. Die beiden Ellipsen, welche wir oben fanden, teilen das Ellipsoid in vier Teile, von denen jeder ein System von Polodien enthält; die äufsersten legen sich nahe an die begrenzenden Halbellipsen heran; sie werden dann allmählich kleiner, und ziehen sich gegen den in demselben Raume liegenden Ellipsoidenscheitelpunkt zusammen. Ist der Raum zwischen den beiden Halbellipsen sehr schmal, so kann die Polodie sehr lang gestreckt werden und doch sehr nahe an dem Scheitelpunkt vorbeigehen, so dafs die Rotation sehr wenig stabil ist,

obgleich deren Axe einen Augenblick sehr nahe bei einer Hauptaxe liegt. In den beiden breiten Räumen sind die Polodien dagegen nahezu kreisförmig. Dieser Fall tritt ein, wenn zwei von den Halbaxen des Ellipsoids nahezu gleich grofs sind.

Die Bahn des Berührungspunktes auf der Berührungsebene ist in der Regel eine transscendente Kurve, die sich wellenförmig zwischen zwei koncentrischen Kreisen bewegt, deren Mittelpunkte auf die Projektion des Ellipsoidenmittelpunktes fallen, und deren Radien Projektionen vom gröfsten und kleinsten Radiusvektor der Polodie sind. Die Kurve, welche von Poinsot Serpolodie genannt ist, kann mit einer verlängerten Epicykloide verglichen werden; sie kann wie diese in sich selbst zurückkehren oder sie kann allmählich den ganzen Kreisring ausfüllen.

Integration der Gleichungen.

87. Wir haben gefunden, dafs p, q und r bestimmt werden durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Zwei Integrale dieser Gleichungen können wir sofort bestimmen, nämlich die Gleichungen, welche ausdrücken, dafs die lebendige Kraft und dafs G konstant ist; diese Gleichungen leitet man leicht aus den Differentialgleichungen ab, indem man sie addiert, nachdem sie bezie-

hungsweise mit p, q, r oder mit Ap, Bq, Cr multipliciert worden sind. Auf die Weise erhält man

$$\left.\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= \omega^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= Q, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= G^2, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wodurch p, q und r bestimmt sind, sobald ω gefunden ist.

Die oben gefundenen Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{(B+C)\,Q - G^2 - BC\omega^2}{(A-B)(C-A)}, \\ q^2 &= \frac{(C+A)\,Q - G^2 - CA\omega^2}{(B-C)(A-B)}, \\ r^2 &= \frac{(A+B)\,Q - G^2 - AB\omega^2}{(C-A)(B-C)}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nun erhält man aus den drei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} &= pqr\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) \\ &= -pqr\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC}, \end{aligned}$$

oder wenn man p, q und r aus (22) entnimmt und

$$\frac{(B+C)\,Q-G^2}{BC} = \alpha^2; \quad \frac{(C+A)\,Q-G^2}{CA} = \beta^2;$$

$$\frac{(A+B)\,Q-G^2}{AB} = \gamma^2$$

setzt,

$$2\,dt = \frac{\pm\, d\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)(\beta^2-\omega^2)(\omega^2-\gamma^2)}}. \tag{23}$$

Die Zeit wird also durch ein elliptisches Integral bestimmt, welches von derselben Form ist wie dasjenige, das wir bei der Behandlung des konischen Pendels fanden, und welches sich durch das daselbst angewandte Verfahren auf die Normalform reducieren läfst.

Die Gröfsen α^2, β^2 und γ^2 sind sämtlich positiv; wir haben nämlich:

$$\alpha^2 = \frac{(B+C-A)\,Q + A\,Q - G^2}{BC};$$

$$\beta^2 = \frac{Q}{A} + \frac{AQ - G^2}{AC};$$

$$\gamma^2 = \frac{Q}{A} + \frac{AQ - G^2}{AB}.$$

Da nun unter der Voraussetzung, dafs $A \geqq B \geqq C$ ist, $AQ \geqq G^2$ sein mufs, und da das eine Trägheitsmoment nicht gröfser sein kann als die Summe der beiden anderen, so sind die drei Gröfsen positiv.

Schreiben wir die Gleichungen (22) in der Form

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \alpha^2 - \frac{(A-B)(C-A)}{BC} p^2 \\ &= \beta^2 - \frac{(B-C)(A-B)}{CA} q^2 \\ &= \gamma^2 - \frac{(C-A)(B-C)}{AB} r^2, \end{aligned}$$

so sehen wir, dafs ω^2 beständig kleiner ist als β^2, aber gröfser als α^2 uud γ^2. Dadurch sind die Grenzen bestimmt, zwischen denen ω^2 sich bewegt. Dann kennt man auch die Grenzen für ρ, und dadurch die beiden festen Kreise in der festen Berührungsebene, zwischen denen die zweite Polkurve, die Serpolodie, sich windet. Für die Bestimmung der Gleichung der letzteren Kurve kann die Bemerkung dienen, dafs für beide Polkurven dieselbe Relation zwischen ρ und der Bogenlänge existieren mufs.

88. Es giebt einen Fall, wo die Relation zwischen t und ω sich ohne elliptische Funktionen ausdrücken läfst. Ist nämlich $G^2 = BQ$, so wird $\alpha^2 = \gamma^2$, und man erhält

$$2t = \pm \int \frac{d \cdot \omega^2}{\left(\omega^2 - \frac{Q}{B}\right)\sqrt{\beta^2 - \omega^2}};$$

die Polodie besteht in diesem Falle, wie früher gezeigt, aus zwei Ellipsen, und die kleine Axe jeder derselben fällt mit der mittleren Axe des Ellipsoids zusammen. Um einen von den Endpunkten dieser Axe, für welchen $\omega^2 = \frac{Q}{B}$, zu erreichen, braucht der Pol eine Zeit, die, wie aus dem Integral hervorgeht, logarithmisch unendlich ist.

Anwendungen.

1. Bestimme die Bewegung eines schweren homogenen Umdrehungskörpers, der sich um einen in seiner Axe liegenden festen Punkt dreht (Gyroskop).

Das Gewicht Mg des Körpers greift im Schwerpunkte an und hat in Bezug auf die Axe des Körpers, die eine Hauptaxe ist, das Moment Null. Ist A das Trägheitsmoment in Bezug auf diese, und $B = C$, so zeigt die erste von den Eulerschen Gleichungen, dafs p konstant ist.

Wir nehmen den festen Punkt zum Anfangspunkt und legen die z-Axe senkrecht, positiv nach unten. Ist (x, y, z) der Schwerpunkt mit dem Abstand a vom festen Punkte, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{1}$$

Die doppelte lebendige Kraft ist $Ap^2 + B(q^2 + r^2)$; da nun p den Schwerpunkt nicht bewegt, so ist das Quadrat der Geschwindigkeit dieses Punktes $a^2(q^2 + r^2)$. Nehmen wir an, dafs der Schwerpunkt für $z = h$ ohne Geschwindigkeit ist, und setzen wir

$$2ga^2 M = B\mu,$$

so erhalten wir nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mu (z - h)\, dt^2. \qquad (2)$$

Eine dritte Gleichung finden wir, wenn wir ausdrücken, dafs die Momentensumme der Bewegungsgröfsen mit Bezug auf die z-Axe konstant ist. Wir finden diese Momentensumme, wenn wir die Kräftepaare Ap, Bq und Br auf die z-Axe projicieren; das erste giebt

$$Ap\frac{z}{a},$$

wo p positiv oder negativ sein kann. Die beiden anderen Kräftepaare lassen sich zu einem von der Gröfse $\frac{Bv}{a}$ zusammensetzen, wo v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist; dieses Kräftepaar liegt in der Ebene, welche durch den Anfangspunkt und die Geschwindigkeit v bestimmt wird, und seine Gröfse kann ausgedrückt werden durch $\frac{2B}{a^2}\cdot\frac{d\Delta}{dt}$, wo Δ die Fläche des Dreiecks ist, welches seine Spitze im Anfangspunkt hat, und dessen Grundlinie das vom Schwerpunkte beschriebene Bogenelement ist; die Projektion dieses Dreiecks auf die xy-Ebene ist $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$; die gesuchte Projektion ist also

$$\frac{B}{a^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

so dafs man die Gleichung

$$Ap\frac{z}{a} + \frac{B}{a^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = Ap\frac{h}{a}$$

erhält, wo die Konstante dadurch bestimmt ist, dafs $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ Null sind für $z = h$.

Die drei Gleichungen lassen sich schreiben:

$$x^2 + y^2 = a^2 - z^2,$$

$$dx^2 + dy^2 = \mu (z - h)\, dt^2 - dz^2,$$

$$xdy - ydx = \frac{apA}{B}(h - z)\, dt.$$

Behandelt man sie wie die analogen Gleichungen beim konischen Pendel, und sind k und k_1 die zu A und B gehörenden Trägheitshalbmesser, so erhält man

$$dt = \frac{\pm k_1^2\, dz}{\sqrt{2gk_1^2(z-h)(a^2-z^2) - p^2k^4(z-h)^2}}.$$

Die Zeit wird also durch ein elliptisches Integral von der bereits mehrfach behandelten Form bestimmt. Der Schwerpunkt schwingt ebenso wie das konische Pendel zwischen zwei horizontalen Kreisen, von denen der obere durch $z = h$ bestimmt wird. Mit der hier betrachteten besonderen Anfangsgeschwindigkeit bleibt die von Schwerpunkt beschriebene Kurve normal zu dem oberen Kreise; das kann man aus dem Umstande schliefsen, dafs, wenn $z-h$ unendlich klein ist, das Flächenelement $xdy-ydx$ von höherer Ordnung als dz wird.

2. Ein homogener schwerer Umdrehungskörper von der Masse m endigt in eine Spitze, die auf einem glatten horizontalen Tische gleiten kann. Bei Beginn der Bewegung hat der Körper keine andere Bewegung als eine Rotation p um seine Axe; wie setzt die Bewegung sich fort? (Kreisel).

Der Schwerpunkt mufs auf derselben Vertikalen bleiben; diese nehmen wir zur z-Axe, die feste Ebene zur xy-Ebene. Der Schwerpunkt möge die Koordinate z mit dem Anfangswerte h haben. Die Spitze hat die Koordinaten x, y, 0 und einen Abstand a vom Schwerpunkt. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen des Schwerpunktes sind A und B; die Rotation p bleibt wie bei der vorhergehenden Aufgabe konstant.

Der Ausdruck für die doppelte lebendige Kraft ist

$$Ap^2 + B(q^2 + r^2) + m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

$q^2 + r^2$ läfst sich hier ebenso wie bei der vorhergehenden Aufgabe ausdrücken; betrachtet man nämlich den Schwerpunkt bei der Rotation als fest, so mufs zu der wirklichen Geschwindigkeit der Spitze die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit entgegengesetzter Richtung hinzugefügt werden; man erhält also die Gleichung

$$B\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) + (B + a^2 m)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2mga^2(z-h).$$

Die beiden anderen Gleichungen sind dieselben wie bei der vorhergehenden Aufgabe; man erhält also:

$$x^2 + y^2 = a^2 - z^2,$$

$$xdy - ydx = \frac{apA}{B}(h-z)\,dt,$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{2mga^2}{B}(z-h)\,dt^2 - \left(1 + \frac{a^2 m}{B}\right)dz^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn k und k_1 die Trägheitshalbmesser sind,

$$dt = \frac{\pm k_1 \sqrt{k_1^2 + a^2 - z^2}\,dz}{\sqrt{2gk_1^2(z-h)(a^2-z^2) - p^2k^4(z-h)^2}}.$$

Man ersieht hieraus, dafs z sich zwischen h und dem nächst kleineren Werte bewegt, der den Divisor zu Null macht. Gleichzeitig beschreibt die Spitze eine Kurve, welche sich zwischen zwei koncentrischen Kreisen windet, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Anfangspunkt ist. Die Kurve erhält Spitzen, welche auf die kleinere Kreisperipherie fallen und in diesen Punkten normal zu ihr sind.

3. Bestimme die Bewegung eines Billardballes, wenn Rücksicht auf die gleitende Reibung genommen wird.

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der Billardebene als xy-Ebene. Der Ball möge den Radius a, die Masse m und den Mittelpunkt (x, y, a) haben; die Komponenten der Rotation nach den Axen seien p, q, r und die Komponenten des Reibungswiderstandes seien mX und mY; dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y;$$

$$\tfrac{2}{5} a \frac{dp}{dt} = Y; \quad \tfrac{2}{5} a \frac{dq}{dt} = -X; \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Durch Elimination von X und Y und Integration ergiebt sich, wenn $\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v,$

$$\tfrac{2}{5} a (q - q_0) = u_0 - u; \quad \tfrac{2}{5} a (p - p_0) = v - v_0; \quad r = r_0,$$

wo die Konstanten durch die Anfangswerte bestimmt sind.

Uns fehlen noch zwei Gleichungen, und diese finden wir, wenn wir Ausdrücke für Richtung und Gröfse des Reibungswiderstandes suchen; der niedrigste Punkt der Kugel erhält durch die Translation eine Geschwindigkeit mit den Komponenten u und v, durch die Rotation eine Geschwindigkeit mit den Komponenten $-aq$ und ap; also in Wirklichkeit eine Geschwindigkeit mit den Komponenten $u - aq$ und $v + ap$; die dadurch bestimmte Richtung ist der der Reibung entgegengesetzt; dadurch erhält man, wenn man die Werte von p und q einsetzt, eine Gleichung von der Form

$$\frac{du}{dv} = \frac{X}{Y} = \frac{u - \alpha}{v - \beta},$$

wo α und β Konstanten sind; daraus folgt

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - \alpha}{v - \beta} = \gamma,$$

wo γ eine dritte Konstante bedeutet.

Wir sehen also, dafs die beschleunigende Kraft konstante Richtung hat; aber auch ihre Gröfse ist konstant, da der Reibungswiderstand nur vom Druck und dem Reibungskoefficienten abhängig ist; hieraus folgt dann, dafs die Bahn eine Parabel ist. Dies gilt jedoch nur solange, bis $u = aq$, $v = -ap$ wird; dann hört die Reibung auf und die Bewegung setzt sich in gerader Linie fort.

NEUNTES KAPITEL.

Die relative Bewegung.

---

89. Oft ist es zweckmäfsig, die Bewegung eines Teilchens so zu betrachten, wie sie sich in einem Punktsystem, das selbst in Bewegung ist, zeigt. Das Teilchen kann beispielsweise an eine Kurve oder Fläche gebunden sein, die selbst sich in Bewegung befinden, und man kann dann die Bewegung auf eben dieser Kurve oder Fläche betrachten; allgemeiner kann man ein mit dem beweglichen System sich fortbewegendes Koordinatensystem betrachten, und nach der Bewegung des Teilchens in Bezug auf dieses fragen. Wir haben in der Kinematik eine solche Bewegung relativ genannt und die absolute Bewegung eines Teilchens als zusammengetetzt betrachtet aus der relativen Bewegung und einer zweiten, der mitführenden Bewegung, welche durch Bewegung des bei der relativen Bewegung als fest betrachteten Systems entsteht. Wir wollen uns die Resultate wieder vorführen, zu denen wir in der Kinematik bei Untersuchung der hier genannten Verhältnisse gelangten.

90. Geschwindigkeit. Wir fanden, dafs die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung die Resultante der Geschwindigkeiten der zusammensetzenden Bewe-

gungen sei. Das ist folgendermafsen zu verstehen: wenn wir die Bewegung einen Augenblick innehalten lassen und vom Teilchen aus dessen Geschwindigkeit abtragen, so wie sie sich in der relativen Bewegung zeigen würde, und ebenso dessen Geschwindigkeit, so wie sie sich in der mitführenden Bewegung zeigen würde, wenn das Teilchen einen Augenblick mit dem beweglichen System fest verbunden wäre, so ist die wirkliche Geschwindigkeit des Teilchens gleich der geometrischen Summe der beiden abgetragenen Geschwindigkeiten.

Betrachten wir z. B. ein Teilchen, welches sich in einer festen Ebene bewegt, so können wir Polar-Koordinaten anwenden und die Bewegung des Teilchens auf einer Geraden betrachten, die sich um den Pol dreht und beständig mit dem Radiusvektor des Teilchens zusammenfällt. Dann ist $\frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit, während $r\frac{d\theta}{dt}$ die Geschwindigkeit der mitführenden Bewegung ist. Die Resultante dieser beiden ist die absolute Geschwindigkeit. Die zusammensetzenden Geschwindigkeiten können auch betrachtet werden als die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Axen in einem beweglichen Koordinatensystem, dessen eine Axe mit dem Radiusvektor zusammenfällt, während die andere senkrecht darauf steht.

Für die Bewegung im Raume können wir in ähnlicher Weise ein festes System von Polar-Koordinaten benutzen und ein bewegliches rechtwinkliges System, dessen eine Axe mit dem Radiusvektor zusammenfällt, während die andere senkrecht darauf in der durch ϕ bestimmten Ebene steht. Die Komponenten der Geschwindigkeit sind dann

$$\frac{dr}{dt}, \quad \frac{rd\theta}{dt} \quad \text{und} \quad r \sin\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

91. Wir haben in der Kinematik gesehen. dafs das bewegliche System sich während der Bewegung verändern kann, dafs man dann aber die einzelnen Punkte des Systems während dieser Bewegung mufs verfolgen können. Als Beispiel wollen wir die Bewegung betrachten, welche bestimmt ist durch die Gleichungen

$$x = a t_1 \cos \omega t_2; \quad y = b t_1 \sin \omega t_2,$$

wo a, b und ω konstant sind, während t_1 und t_2 die Zeit bedeuten.

Eliminiert man t_2 oder t_1, so erhält man beziehungsweise

$$\frac{x^2}{a^2 t_1^2} + \frac{y^2}{b^2 t_1^2} = 1 \quad \text{und} \quad ay = bx \operatorname{tg} \omega t_2.$$

Der Ort des Teilchens ist also bestimmt durch ein System von perspektivisch-ähnlichen Ellipsen und durch ein System von Geraden, die durch den Mittelpunkt gehen. Lassen wir t_1 konstant sein, so ist die relative Geschwindigkeit auf der Ellipse bestimmt durch

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega t \sin \omega t; \quad \frac{dy}{dt} = b\omega t \cos \omega t,$$

während sich, wenn wir t_2 konstant sein lassen, für die relative Geschwindigkeit auf der Geraden ergiebt:

$$\frac{dx}{dt} = a \cos \omega t; \quad \frac{dy}{dt} = b \sin \omega t.$$

Es ist gleichgültig, welche der beiden Bewegungen man als mitführende Bewegung betrachten will; betrachtet man die durch die Veränderung der Ellipse hervorgerufene Bewegung als die mitführende, so sind die auf demselben Radiusvektor liegenden Punkte einander entsprechende Punkte der Ellipsen; betrachtet man dagegen die durch

Drehung des Radiusvektor erzeugte Bewegung als die mitführende, so liegen die sich entsprechenden Punkte auf derselben Ellipse.

Die absolute Geschwindigkeit bestimmt man, indem man t_1 und t_2 gleichzeitig variieren läfst; ihre Komponenten findet man also durch Addition der oben gefundenen entsprechenden Komponenten.

92. Beschleunigung. Wir fanden früher (Kinematik, 30), dafs die Beschleunigung der absoluten Bewegung die Summe von drei anderen sei, nämlich von den Beschleunigungen der zusammensetzenden Bewegungen und von einer dritten, die, unter Benutzung der in der Kinematik gebrauchten Bezeichnungen, der Gröfse und Richtung nach bestimmt wird durch $MN:dt^2$. Für diese Gröfse fanden wir den Ausdruck

$$2v_1\omega \sin\alpha,$$

wo v_1 die relative Geschwindigkeit ist, während α den Winkel bezeichnet, welche diese Geschwindigkeit mit der augenblicklichen Rotationsaxe des mitführenden Systems bildet, und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Die Komponente ist senkrecht zur Rotationsaxe und der relativen Geschwindigkeit gerichtet, nach derselben Seite wie die Bewegung.

Oft bestimmt man die dritte Komponente leichter, wenn man beachtet, dafs $MN:dt$ die geometrische Zunahme ist, welche $B_1M:dt$ in zwei Zeitelementen erfährt; $B_1M:dt$ ist aber der Gröfse und Richtung nach gleich der relativen Geschwindigkeit.

Man bestimmt also die dritte Komponente der Gröfse und Richtung nach, wenn man das Doppelte der geometrischen Zunahme, welche

die relative Geschwindigkeit durch die mitführende Bewegung in einem Zeitelement erfährt, durch das Zeitelement dividiert.

Die dieser Komponente entsprechende beschleunigende Kraft mit entgegengesetzter Richtung ist von Coriolis die zusammengesetzte Centrifugalkraft genannt.

Man sieht leicht, dafs die geometrische Zunahme, welche die zusammengesetzte Centrifugalkraft bestimmt, die geometrische Summe der Zunahmen ist, die man erhalten würde, wenn man die relative Geschwindigkeit durch ihre Komponenten ersetzte. Diese Bemerkung kann oft dazu dienen, die Berechnung der zusammengesetzten Centrifugalkraft zu erleichtern.

Als Beispiel wollen wir die Bewegung eines Teilchens in einer Ebene betrachten und Polar-Koordinaten benutzen. Die relative Bewegung des Teilchens auf dem Radiusvektor bestimmt dann die Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2}$. Verbindet man das Teilchen fest mit dem Radiusvektor, so beschreibt es einen kleinen Kreisbogen; die Beschleunigung dieser Bewegung ist aus zweien zusammengesetzt, nämlich aus der tangentialen $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ und der centripetalen $-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. Es bleibt noch übrig, die dritte Komponente zu finden. Die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ wird in der Zeit dt um einen Winkel $d\theta$ gedreht und erhält dadurch die geometrische Zunahme $\frac{dr}{dt}d\theta$; die gesuchte Komponente ist also $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ mit derselben Richtung wie die oben gefundene tangentiale Komponente. Wir erhalten also beziehungsweise nach Radiusvektor und senkrecht darauf:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{und} \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens auf einer Kugel vom Radius r. Ein Hauptkreis dreht sich um seinen Durchmesser und beschreibt den Winkel ψ, während die Lage des Teilchens auf dem Hauptkreise durch den Winkel θ, der vom festen Durchmesser aus gerechnet wird, bestimmt ist. Für die relative Bewegung auf dem Hauptkreise erhalten wir dann die tangentiale Beschleunigung $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ und die normale $-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. Für die mitführende Bewegung erhalten wir $r\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2}$ senkrecht zur Ebene des Hauptkreises, und $-r\sin\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ in der Ebene des Hauptkreises senkrecht zum Durchmesser. Dieselbe Richtung wie die erste von diesen beiden erhält die dritte Komponente; die relative Geschwindigkeit ist $r\frac{d\theta}{dt}$; wenn diese sich um den Winkel $d\psi$ um eine parallel zum festen Durchmesser durch den Anfangspunkt der Geschwindigkeit gelegte Axe dreht, so beschreibt ihr Endpunkt einen Bogen $r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta d\psi$; die dritte Komponente ist also $2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}$. Demnach erhalten wir:

nach dem Radius (positiv nach aufsen)

$$-r\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right)=-\frac{v^2}{r};$$

nach der Tangente des Hauptkreises (positiv bei wachsendem θ)

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}-r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2;$$

senkrecht zur Ebene des Hauptkreises (positiv bei wachsendem ψ)

$$r \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2r\cos\theta \frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{\sin\theta}\frac{d}{dt} . \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} .$$

93. Häufig will man gerade die relative Bewegung untersuchen; dann findet man die Beschleunigung derselben, indem man von der Beschleunigung der absoluten Bewegung die beiden anderen Komponenten (geometrisch) subtrahiert. Das Resultat läfst sich folgendermafsen ausdrücken:

Die relative Bewegung eines Teilchens läfst sich als absolute Bewegung behandeln, wenn zu den in jedem Augenblick wirkenden Kräften zwei fingierte Kräfte hinzugefügt werden: 1) eine Kraft, die derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, welche dem Teilchen die Bewegung geben würde, die es im Augenblick, wenn es sich in relativer Ruhe befände, haben würde, und 2) eine Kraft, die sich ergiebt, wenn man die Masse des Teilchens mit der zusammengesetzten Centrifugalkraft multipliciert, und deren Richtung derjenigen der geometrischen Zunahme der relativen Geschwindigkeit entgegengesetzt ist.

Die dritte Komponente fällt fort in drei Fällen, nämlich

1) wenn das Teilchen sich in relativer Ruhe befindet,
2) wenn die relative Geschwindigkeit der augenblicklichen Axe parallel ist, und
3) wenn das bewegliche Koordinatensystem nur eine Translation hat.

Der letzte Fall tritt häufig ein, da man oft einen von den Punkten eines bewegten Systems zum Anfangs-

punkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems nimmt, dessen Axen konstante Richtungen haben. An jedem Teilchen mufs dann eine fingierte Kraft angebracht werden, die dem Teilchen eine Beschleunigung erteilt, welche der Beschleunigung des Anfangspunktes in der absoluten Bewegung gleich und entgegengesetzt ist. Wirken nur innere Kräfte, und ist der Schwerpunkt des Systems der gewählte Anfangspunkt, so fällt die fingierte Kraft fort.

94. Nachdem die fingierten Kräfte hinzugefügt sind, läfst das Princip der lebendigen Kraft sich wie gewöhnlich anwenden; die lebendige Kraft wird dann aus den relativen Geschwindigkeiten gebildet, und die ausgeführte Arbeit wird durch die relativen Bahnelemente bestimmt. Die zusammengesetzte Centrifugalkraft führt keine Arbeit aus, da sie normal zu der relativen Geschwindigkeit gerichtet ist. Ist die Bewegung des Koordinatensystems eine Translation, so lassen die hinzugefügten Kräfte sich zu einer zusammensetzen, welche der ganzen, im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse eine Beschleunigung erteilt, die der Beschleunigung des Anfangspunktes in der absoluten Bewegung gleich und entgegengesetzt ist; die Arbeit dieser Kraft bei der relativen Bewegung mufs dann zu der Arbeit hinzugefügt werden, welche die wirklichen Kräfte ausführen.

Die Bedingung dafür, dafs das Princip der Flächen sich auf die relativen Bahnen anwenden läfst, ist die, dafs die hinzugefügten fingierten Kräfte den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten oder im Verein mit diesen eine durch den Anfangspunkt gehende Resultante ergeben.

95. Der wesentlichste Vorteil, welchen die voranstehenden Betrachtungen mit sich bringen, besteht darin, dafs sie die sonst häufig sehr langwierigen Rechnungen, welche der Übergang zu einem neuen Koordinatensystem verlangt, erleichtern. Um z. B. die oben gefundenen Ausdrücke für die Beschleunigung nach Radiusvektor und senkrecht darauf direkt zu finden, mufs man die Beschleunigungen nach den Axen auf die beiden Richtungen projicieren, wodurch man erhält:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{x}{r} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{y}{r} \quad \text{und} \quad -\frac{d^2x}{dt^2}\frac{y}{r} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{x}{r};$$

hierin hat man dann r und θ mittels der Gleichungen

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta$$

einzuführen.

Eine dritte und häufig die einfachste Methode besteht in der Anwendung der zweiten Form von Lagranges Bewegungsgleichungen; hierbei kommt es nur darauf an, die allgemeinen Ausdrücke für die lebendige Kraft und die Arbeit aus den neuen Variablen zu bilden, und das ist in der Regel nicht schwierig, da in diesen nur Differentialquotienten erster Ordnung vorkommen. Beispielsweise erhält man für die oben behandelte Aufgabe:

$$2T = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

während der Zuwachs an Arbeit

$$R\delta r + Fr\delta\theta,$$

beträgt, wo R und F die beiden erwähnten Komponenten der Beschleunigung bedeuten.

Anwendungen.

1. Bestimme die Bewegung eines schweren Teilchens von der Masse 1 an der Erdoberfläche, wenn die Anzie-

hung der Erde als die einzige wirkende Kraft betrachtet wird.

Wir nehmen an, dafs die Erde eine aus homogenen koncentrischen Schalen bestehende Kugel sei und sehen von der Translation der Erdaxe ab, die ohne Einflufs ist, wenn wir die Anziehung der Sonne nicht mit in Betracht ziehen. Wir sehen gleichfalls ab von der geringen Variation der Erdaxe hinsichtlich der Richtung; mit anderen Worten: wir betrachten die Erde als eine Kugel, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste, die Pole verbindende Axe dreht.

Die Kraft, welche wegen der mitführenden Bewegung hinzugefügt werden mufs, ist die Centrifugalkraft, welche der Schwere entgegenwirkt und im Verein mit dieser dem Teilchen sein Gewicht, so wie wir es beobachten, erteilt. Dies Gewicht sei g; für kleinere Ortsveränderungen können wir dasselbe als der Gröfse und Richtung nach konstant betrachten.

Wir haben also nur die zusammengesetzte Centrifugalkraft zu bestimmen. Die z-Axe legen wir senkrecht nach oben, die y-Axe wagerecht nach Süden und die x-Axe nach Osten. Ferner nehmen wir an, dafs wir uns auf der nördlichen Halbkugel unter einer geographischen Breite b befinden.

Die Komponenten der relativen Geschwindigkeit seien $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; nun können wir, wie früher bemerkt, die zusammengesetzte Centrifugalkraft für jede von diesen einzeln suchen.

Die erste ergiebt eine Kraft $2\omega\frac{dx}{dt}$, deren Projektionen auf die y- und die z-Axe durch Multiplikation mit beziehungsweise $\sin b$ und $\cos b$ gefunden werden;

durch eine ähnliche Untersuchung in Betreff der anderen Komponenten und durch Zusammensetzung der gefundenen Kräfte erhält man die gesuchten Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dz}{dt}\cos b - 2\omega\frac{dy}{dt}\sin b,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt}\sin b,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt}\cos b - g.$$

Diese Gleichungen wollen wir integrieren unter der Voraussetzung, dafs das Teilchen vom Anfangspunkt ohne relative Anfangsgeschwindigkeit zu fallen beginnt. Dann erhalten wir zuerst:

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega(z\cos b + y\sin b),$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega x\sin b,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2\omega x\cos b - gt.$$

Werden y und z eliminiert, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\omega^2 x = 2\omega gt\cos b;$$

Nun ist

$$\omega = 0{,}000073,$$

so dafs das zweite Glied eine sehr kleine Gröfse wird; vernachlässigen wir dasselbe, so erhalten wir

$$x = \tfrac{1}{3}\omega gt^3\cos b$$

und darauf mit demselben Grade der Annäherung

$$y = 0; \quad z = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Wir sehen also, dafs beim Falle eine kleine Abweichung nach Osten stattfindet, während der Fall der Pro-

jektion des Teilchens auf die Senkrechte von der Rotation der Erde nicht beeinflufst wird.

2. Unter denselben Bedingungen wie in der vorhergehenden Aufgabe soll die Bewegung eines schweren Teilchens bestimmt werden, das an die xy-Ebene gebunden ist, und seine Bewegung im Anfangspunkte mit einer gegebenen Geschwindigkeit beginnt.

3. Die relative Pendelbewegung (das Foucaultsche Pendel).

Wir nehmen den Aufhängungspunkt zum Anfangspunkt und legen das Koordinatensystem wie oben; ist R die Spannung, so haben die wirkenden Kräfte die Komponenten

$$-\frac{x}{a}R; \quad -\frac{y}{a}R; \quad -\frac{z}{a}R-g,$$

wo a die Pendellänge bedeutet. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\omega\sin b\frac{dy}{dt}+2\omega\cos b\frac{dz}{dt}+R\frac{x}{a}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\omega\sin b\frac{dx}{dt}+R\frac{y}{a}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}-2\omega\cos b\frac{dx}{dt}+R\frac{z}{a}+g=0.$$

Für kleine Ausschläge können wir $z=-a$ setzen, und wir erhalten dann aus der dritten Gleichung

$$R=g-2\omega\cos b\frac{dx}{dt};$$

nun verwandeln sich, wenn wir Glieder, welche ωx oder ωy enthalten, vernachlässigen, die beiden anderen Gleichungen in

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\omega\sin b\frac{dx}{dt}-g\frac{y}{a}; \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-2\omega\sin b\frac{dy}{dt}-\frac{gx}{a}.$$

Setzen wir hier, wenn $\beta = a + \omega \sin b \,.\, t$, ($a$ konstant),

$$y = \xi \cos\beta + \zeta \sin\beta; \quad x = -\xi \sin\beta + \zeta \cos\beta,$$

so erhalten wir, da ω^2 verschwindend klein ist,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{g}{a}\xi = 0; \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g}{a}\zeta = 0.$$

Nehmen wir nun an, dafs, wenn $t = 0$ ist

$$\xi = a_1; \quad \zeta = 0; \quad \frac{d\xi}{dt} = 0; \quad \frac{d\zeta}{dt} = a_1 \omega \sin b; \quad \beta = a,$$

so ergiebt sich

$$\xi = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} \,.\, t\right); \quad \zeta = a_1 \omega \sin b \sqrt{\frac{a}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} \,.\, t\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die Bahn eine sehr lang gestreckte Ellipse ist, die sich mit dem Koordinatensystem (ξ, ζ), also mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin b$ dreht.

4. Bestimme die relative Bewegung eines schweren Teilchens, das ohne Anfangsgeschwindigkeit eine schiefe Ebene hinunterfällt, deren horizontale Kante senkrecht auf der Erdaxe steht.

5. Ein gegebener Winkel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den einen senkrechten Schenkel; bestimme die Bewegung eines schweren Teilchens, das an den anderen Schenkel gebunden ist.

6. Ein schweres Teilchen ist an eine glatte Ebene gebunden, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine in der Ebene liegende horizontale Axe dreht. Bestimme sowohl die relative wie die absolute Bewegung.

7. Drei Teilchen mit gegebenen Massen bewegen sich in derselben Ebene, indem sie sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Wie gestalten sich die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn das eine Teilchen zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen wird, dessen Axen konstante Richtungen haben?

ZEHNTES KAPITEL.

Vermischte Untersuchungen.

Über die Bewegung ähnlicher Systeme.

96. Wenn wir in der Mechanik vollkommen willkürliche Einheiten behalten hätten, so würden alle Formeln sich als homogen in Bezug auf jedes System von darin vorkommenden Gröfsen derselben Art erwiesen haben. Es ist uns jedoch bequemer gewesen, bestimmte, von einander abhängige Einheiten für Länge, Masse, Gewicht, Zeit, Kraft u. s. w. anzunehmen; dadurch haben wir erreicht, dafs unsere Formeln einfacher geworden sind, aber andererseits haben wir uns dadurch den Vorteil entgehen lassen, den die Homogenität der Formeln hätte mit sich bringen können. Zu diesen Vorteilen würde namentlich der gehört haben, dafs Formeln, die für ein gewisses System gültig waren, auch für ein diesem ähnliches System gültig gewesen wären.

Wir wollen deshalb die Frage nach der Homogenität, die zuerst von Newton vollständig beantwortet worden ist, etwas näher untersuchen. Insbesondere wollen wir den Fall ins Auge fassen, wo man von einem Modell aus Schlüsse auf die fertige Maschine ziehen will.

Wir betrachten also zwei ähnliche materielle Systeme, deren lineares Verhältnis α ist. Da das Modell in der Regel aus demselben Material besteht wie die Maschine, so nehmen wir an, dafs homologe Punkte von derselben Dichtigkeit sind. Das Verhältnis homologer Volumina, Massen und Gewichte ist dann α^3.

Nehmen wir an, dafs homologe Teilchen von denselben beschleunigenden Kräften angegriffen werden, so ist α^3 das Verhältnis der bewegenden Kräfte; dasselbe gilt dann für Druck und gleitende Reibung; für die rollende Reibung ist α^2 das Verhältnis, da man annimmt, dafs die rollende Reibung dem Krümmungsradius umgekehrt proportional ist.

Der Ausdruck für eine Komponente der unveränderten beschleunigenden Kraft $\frac{d^2x}{dt^2}$ zeigt, dafs das Verhältnis der Zeiten $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ist; dasselbe gilt dann für das Verhältnis der Geschwindigkeiten; für die lebendige Kraft und die Arbeit ist α^4 das Verhältnis. Für den Luftwiderstand, welcher der Fläche und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, ist das Verhältnis α^3 wie für die übrigen bewegenden Kräfte.

Wir nahmen an, dafs die beschleunigenden Kräfte in homologen Punkten dieselben waren; wird ein anderes Verhältnis vorausgesetzt, so findet man leicht die dadurch bewirkte Änderung der gefundenen Resultate.

Über die Stabilität des Gleichgewichts.

97. Wenn ein System von materiellen Punkten, auf das gewisse Kräfte wirken, sich in Ruhe befindet, und man demselben eine sehr kleine lebendige Kraft mitteilt,

so kann es sich ereignen, dafs das System um die Gleichgewichtslage zu schwingen beginnt, so dafs es sich nur wenig von dieser entfernt. Dann nennt man das Gleichgewicht beständig oder stabil, während es im entgegengesetzten Fall unbeständig oder labil heifst.

Wenn die Teilchen sich von der Gleichgewichtslage auf Grund der mitgeteilten kleinen lebendigen Kraft entfernen, so führen die wirkenden Kräfte eine gewisse Arbeit aus; ist diese negativ, so kann die Bewegung sich nicht fortsetzen, so wie sie begonnen ist, denn die mitgeteilte lebendige Kraft, welche wir uns so klein denken können, wie wir wollen, wird durch die negative Arbeit verbraucht. Hieraus schliefsen wir, dafs das Gleichgewicht gewissen kleinen Verschiebungen der Teilchen gegenüber stabil ist, wenn die durch diese Verschiebungen von den wirkenden Kräften ausgeführte Arbeit negativ ist. Häufig ist das Gleichgewicht stabil für einige, labil dagegen für andere Verschiebungen. Ist es stabil für alle mit den gegebenen Bedingungen übereinstimmenden kleinen Verschiebungen, so nennt man es absolut stabil.

Wir wollen im besonderen ein einzelnes Teilchen betrachten, das sich unter der Einwirkung gewisser Kräfte im Gleichgewicht befindet; diese Kräfte haben, wie wir annehmen, ein Potential U, das eine Funktion der Koordinaten des Teilchens ist. Erteilen wir diesen die kleinen Zunahmen h, k, l, so ist die Zunahme an lebendiger Kraft oder Arbeit

$$\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}hk+\ldots\right)+\ldots;$$

nun ist in der Gleichgewichtslage

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

so dafs das Vorzeichen der Zunahme für hinreichend kleine h, k, l durch die in Klammern eingeschlossene Gröfse bestimmt wird. Legen wir den Anfangspunkt in die Gleichgewichtslage und setzen wir x, y, z für h, k, l, so ergiebt sich, dafs die Zunahme Null (unendlich klein von höherer als zweiter Ordnung) wird für Verschiebungen längs einer Erzeugenden der Kegelfläche

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} z^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} yz + 2\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} zx + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} xy = 0.$$

Diese Kegelfläche teilt, wenn sie reell ist, den Raum in zwei Teile; geht man von dem einen dieser Teile über zu dem andern, so wechselt die Zunahme der lebendigen Kraft das Vorzeichen. Das Gleichgewicht ist also stabil oder labil, je nachdem man dem Teilchen kleine Verschiebungen in den einen oder andern der beiden Räume hinein erteilt.

Soll das Gleichgewicht absolut stabil sein, so mufs die Kegelfläche imaginär werden, und $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und die analogen müssen negativ sein. Die Gleichgewichtslage entspricht also einem Maximum von U.

Man sieht leicht, dafs absolute Stabilität nicht stattfinden kann, wenn die wirkenden Kräfte in Anziehungen nach dem Newtonschen Gesetz, die gegen feste Mittelpunkte gerichtet sind, bestehen, und das Teilchen nicht in der anziehenden Masse liegt; in diesem Falle hat man nämlich (Statik, 111):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

so dafs die drei Glieder nicht alle negativ sein können.

Kleine Schwingungen.

98. Wir wollen annehmen, dafs ein System von Teilchen sich unter der Einwirkung gewisser Kräfte in einem Zustand stabilen Gleichgewichtes befinde, und versuchen die Schwingungen zu bestimmen, welche das System ausführen mufs, wenn wir es etwas aus der Gleichgewichtslage herausbringen und darauf den Einwirkungen der gegebenen Kräfte, die nur von den Koordinaten abhängen, überlassen. Wir nehmen an, dafs die Lage des Systems durch gewisse von einander unabhängige Gröfsen $p_1, p_2 \ldots p_\mu$ bestimmt ist, und dafs diese so gewählt sind, dafs sie alle für die Gleichgewichtslage Null werden; dann sind sie während der ganzen Bewegung sehr klein, und, wenn wir diese nur annähernd zu bestimmen suchen, können wir alle Glieder fortwerfen, welche in Bezug auf die Koordinaten von höherem als dem zweiten Grade sind. Dadurch erhalten wir ein System von linearen Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koefficienten; dieselben sind von der Form

$$\frac{d^2 p_i}{dt^2} = a_1 p_1 + a_2 p_2 \ldots + a_\mu p_\mu,$$

und ihre Anzahl ist gleich der der neuen Koordinaten.

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man jede der μ Koordinaten ausgedrückt als eine Summe aus μ Gliedern von der Form

$$K_{1,1} A_1 \sin\left(\sqrt{r_1}\, t + \alpha\right),$$

wo A_1, α und die analogen Konstanten sind, die durch den Anfangszustand bestimmt werden, während r_1 und die analogen die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade μ sind; von diesen sind wieder die Konstanten K abhängig.

Ein Teilchen, welches sich in der x-Axe so bewegt, dafs

$$x = A \sin(\sqrt{r}\,t + a),$$

führt Schwingungen aus mit der Schwingungszeit $\frac{\pi}{\sqrt{r}}$; hat man ähnliche Ausdrücke für die beiden anderen Koordinaten (mit demselben r), so führt das Teilchen eine periodische Bewegung im Raume mit derselben Schwingungszeit aus; deshalb kann man bei der allgemeinen Aufgabe das Resultat so ausdrücken, dafs das System Schwingungen ausführt, welche aus den μ Schwingungen zusammengesetzt sind, die beziehungsweise r_1, $r_2 \ldots r_\mu$ entsprechen.

Diese Auffassung, nach der kleine periodische Schwingungen als aus elementaren Schwingungen zusammengesetzt erscheinen, verdanken wir Daniel Bernoulli (Mémoires de l'académie de Berlin, 1753).

99. Wir wollen annehmen, dafs wir für dieselben Gleichungen die Variablen für verschiedene Systeme von Anfangswerten von ihnen und ihren Derivierten bestimmt hätten; ersetzen wir dann jede Variable durch die Summe der einzeln gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir Werte, welche auch den linearen Differentialgleichungen genügen, und bei denen wir als Anfangswerte die Summe der einander entsprechenden, einzeln benutzten Anfangswerte benutzen können. Man kann dies so auffassen, als ob die einzeln bestimmten Schwingungen sich über einander lagern ohne sich zu beeinflussen, eine Form der Betrachtung, die in der mathematischen Physik von grofser Bedeutung ist.

Schwingende Fäden.

100. In der Statik haben wir die Gleichgewichtsbedingungen entwickelt für einen undehnbaren biegsamen Faden, auf den gewisse Kräfte wirken; aus den dort gefundenen Gleichungen lassen sich leicht die Gleichungen für die Bewegung eines solchen Fadens ableiten. Da die Gleichungen nämlich ausdrücken, das jedes Fadenelement für sich im Gleichgewicht ist, so brauchen wir, um zu den Bewegungsgleichungen überzugehen, nur nach d'Alemberts Princip zu den wirkenden Kräften die Effektivkräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen hinzuzufügen; wir erhalten also, wenn wir die in der Statik benutzten Bezeichnungen beibehalten,

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\rho ds=0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\rho ds=0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\rho ds=0.$$

Im besonderen wollen wir diese Gleichungen auf den Fall anwenden, wo ein homogener Faden in seinem einen Endpunkt A befestigt ist und, indem er beispielsweise horizontal liegt, über eine kleine Rolle B läuft und ein Gewicht T trägt. In der Gleichgewichtslage ist dann T die Spannung in allen Punkten des Fadens; wir nehmen an, dafs das horizontale Fadenstück l sei, und dafs keine äufseren Kräfte wirken; die x-Axe legen wir so, dafs sie mit dem Faden zusammenfällt, und den festen Endpunkt des Fadens nehmen wir zum Anfangspunkt.

Nun bringen wir den Faden dahin kleine Schwingungen auszuführen, bei denen er sich nur wenig von der Gleichgewichtslage entfernt; da der Unterschied

zwischen einem unendlich kleinen Bogen und seiner Sehne von dritter Ordnung ist, so können wir annehmen, dafs alle Elemente des Fadens in Ebenen schwingen, die senkrecht auf AB stehen; dann haben wir

$$\frac{dx}{ds} = 1; \quad \frac{dx}{dt} = 0;$$

dadurch ergiebt sich aus der ersten Bewegungsgleichung, dafs die Spannung konstant ist, während die beiden anderen Bewegungsgleichungen werden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{T}{\rho}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Im besonderen wollen wir annehmen, dafs die Schwingungen in derselben Ebene vor sich gehen; legen wir die y-Axe in diese Ebene, und setzen wir $T = \rho a^2$, so erhalten wir zur Bestimmung von y als Funktion der von einander unabhängigen x und t:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichung wird wie bekannt integriert durch

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at),$$

wo f und φ zwei willkürliche Funktionen sind.

Für $t = 0$ hat man

$$y = f(x) + \varphi(x); \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a(f'(x) - \varphi'(x)),$$

diese Gleichungen dienen zur Bestimmung der willkürlichen Funktionen, wenn man die Kurve, welche der Faden bildet, und die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte für $t = 0$ kennt.

Anwendungen.

1. Bestimme das Verhältnis zwischen den Schwingungszeiten zweier einfacher Pendel von verschiedener Länge mit Hülfe des Ähnlichkeitsprincips.

2. Ein schwerer Körper, der sich um einen festen Punkt drehen kann, befindet sich im Gleichgewicht; untersuche die Natur des Gleichgewichts.

3. Wie müssen die Flächen der Segel sich bei zwei ähnlichen Schiffen verhalten, wenn diese unter übrigens gleichen Umständen gleich gut segeln sollen? Es werde angenommen, dafs der Widerstand des Wassers proportional der Fläche und dem Quadrate der Geschwindigkeit sei.

4. Ein Ellipsoid steht so, dafs seine Halbaxe c senkrecht gerichtet ist; ein schweres Teilchen, welches an das Ellipsoid gebunden ist, macht kleine Schwingungen um den tiefsten Punkt; man bestimme diese.

Aus der Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-c)^2}{c^2} = 1,$$

läfst sich, wenn man verschwindende Glieder vernachlässigt, ableiten, dafs

$$z = \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right);$$

nun ergiebt d'Alemberts Princip:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + g\right)\delta z = 0;$$

hieraus folgt, da

$$\delta z = \frac{cx}{a^2}\delta x + \frac{cy}{b^2}\delta y$$

ist, dafs

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cg}{a^2}x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{cg}{b^2}y = 0;$$

dadurch werden zwei Schwingungen bestimmt, aus denen man sich die Schwingung des Teilchens zusammengesetzt denken kann.

5. Zwischen zwei Punkten ist ein elastischer Faden von der Länge $3a$ ausgespannt; derselbe wird durch zwei Teilchen, die beide die Masse 1 haben, in drei gleich grofse Teile geteilt. In der Gleichgewichtslage beträgt die Spannung in den drei Fadenstücken T, während die Spannung im übrigen als der Länge des Fadenstückes proportional angenommen wird. Bestimme die Schwingungen der Teilchen, wenn sie ohne die gerade Linie zwischen den festen Punkten zu verlassen, etwas von der Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen werden.



Inhalt.

Seite

Einleitung . . . . 1.

ERSTES KAPITEL.

Geradlinige Bewegung eines Teilchens . . . . 10.

ZWEITES KAPITEL.

Freie krummlinige Bewegung eines Teilchens . . . . 23.

DRITTES KAPITEL.

Bewegung eines gebundenen Punktes . . . . 38.
Bewegung eines Punktes, der an eine Kurve gebunden ist.
Bewegung eines Teilchens, welches an eine Fläche gebunden ist.

VIERTES KAPITEL.

Allgemeine Grundsätze für die Bewegung zusammengesetzter Systeme . . . . 58.
D'Alemberts Princip. Bewegung des Schwerpunktes. Das Princip der Flächen. Instantane Kräfte oder Stofskräfte. Lebendige Kraft und Arbeit. Das Princip von Gauss. Das Princip der kleisten Wirkung und Hamiltons Princip. Bedingungsgleichungen. Gleichungen von Lagrange. Poissons und Hamiltons Gleichungen.

FÜNFTES KAPITEL.

Das Trägheitsmoment . . . . 123.

SECHTES KAPITEL.

Der Stofs . . . . 140.

SIEBENTES KAPITEL.

Bewegung eines Körpers mit einer festen Axe . . . . 155.
Beginn der Bewegung. Fortsetzung der Bewegung.

ACHTES KAPITEL. Seite

Bewegung eines einzelnen Körpers . . . . 167.
Beginn der Bewegung. Fortsetzung der Bewegung. Besondere Untersuchung des Falles, wo keine äufseren Kräfte wirken. Integration der Gleichungen.

NEUNTES KAPITEL.

Die relative Bewegung . . . . 190.

ZEHNTES KAPITEL.

Vermischte Untersuchungen . . . . 204.
Über die Bewegung ähnlicher Systeme. Über die Stabilität des Gleichgewichts. Kleine Schwingungen. Schwingende Fäden.

Kopenhagen. — Bianco Lunos kön. Hof-Buchdruckerei (F. Dreyer).



